DEFINIZIONI FONDAMENTALI

L'*automatica* o Ingegneria dei Sistemi è il complesso di tecniche volte a sostituire l'intervento umano, o a migliorarne l'efficienza, nell'esercizio di dispositivi e impianti (si veda il testo G. Marro, Controlli Automatici, Zanichelli, 2004). Essa è dunque quella disciplina che studia la modellazione matematica di sistemi di diversa natura, ne analizza il comportamento dinamico e realizza opportuni dispositivi di controllo per far sì che tali sistemi abbiano il comportamento desiderato. La disciplina dell'automatica è l'insieme della teoria dei sistemi dinamici, degli algoritmi per il controllo degli stessi e delle applicazioni di tale teoria, non solo in campo industriale.

Un'importante branca dell'automatica è la disciplina denominata *controlli automatici*. Tale espressione comprende il sostantivo *controllo* e l'aggettivo *automatico*. In italiano corrente il verbo controllare ha il significato di comandare, regolare o anche dirigere, supervisionare o governare. Molto spesso il significato del termine controllo ha un'accezione passiva (si pensi al controllore del treno, il cui compito è semplicemente verificare il possesso o meno dei biglietti da parte dei passeggeri, corrispondente dunque a semplici funzioni di supervisore). L'aggettivo automatico implica invece un auto-funzionamento che non richiede l'intervento umano. Per tale motivo nella locuzione controlli automatici il significato del verbo controllare ha sempre una accezione attiva: in altre parole il sinonimo che usiamo per tale verbo è regolare, comandare.

La disciplina dei controlli automatici studia dunque i dispositivi (detti *regolatori*, *controllori* o *dispositivi di controllo*), mediante i quali si fanno variare automaticamente le grandezze liberamente manipolabili di un sistema (detto *sistema controllato*).

Quindi l'obiettivo della disciplina dei controlli automatici è la definizione delle strategie (algoritmi di controllo) affinché un sistema (processo industriale, macchina, allevamento, ...) svolga i suoi compiti con intervento umano limitato o del tutto assente.

La nozione che sta alla base dell'Automatica è certamente quella di sistema. Numerose definizioni di tale concetto sono state proposte nella letteratura.

Il manuale dell'IEEE definisce un sistema come un insieme di elementi che cooperano per svolgere una funzione altrimenti impossibile per ciascuno dei singoli componenti.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Il grande dizionario della lingua italiana di S. Battaglia definisce un sistema come un insieme, complesso articolato di elementi o di strumenti fra loro coordinati in vista di una funzione determinata.

In definitiva, il sistema è un ente astratto, definito in modo assiomatico, utile a descrivere un insieme di fenomeni interagenti che evolvono nel tempo attraverso un modello matematico opportuno.

Un *sistema di controllo automatico* è un sistema di controllo che si autoregola, senza la necessità di intervento umano.

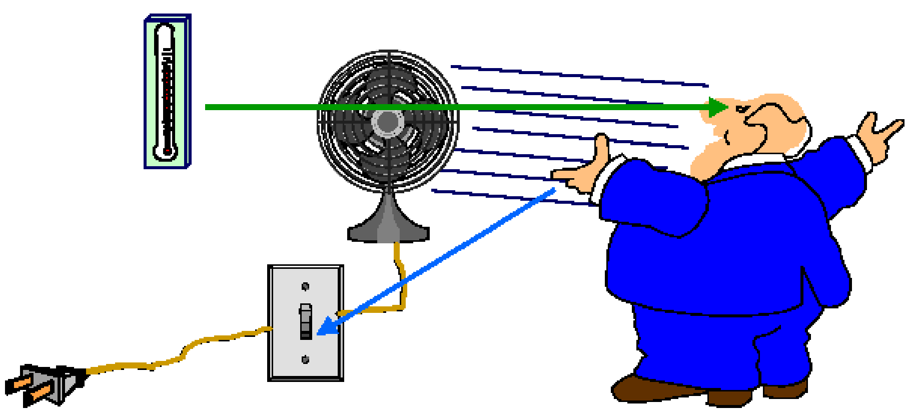
Il più antico sistema di controllo è l'uomo. Un *sistema di controllo manuale* è un sistema di controllo regolato tramite intervento umano totale o parziale (es: doccia, ventilatore, rubinetto, stufa).

Alcuni esempi di attività umane dove il controllo è elemento indispensabile sono i seguenti: camminare, suonare uno strumento musicale, guidare un veicolo, nuotare, etc.

ESEMPI DI CONTROLLO MANUALE

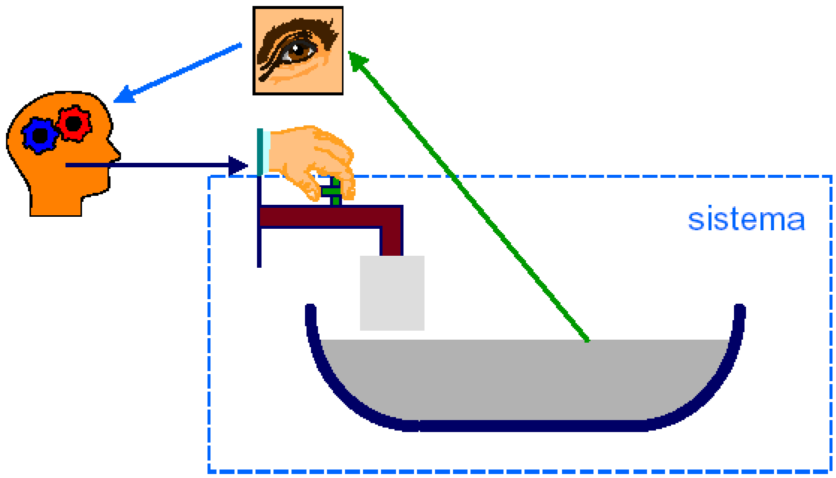
Vediamo alcuni esempi di controllo manuale, in cui le azioni di controllo sono eseguite dall'uomo.

Controllo (manuale) di temperatura (in anello aperto)

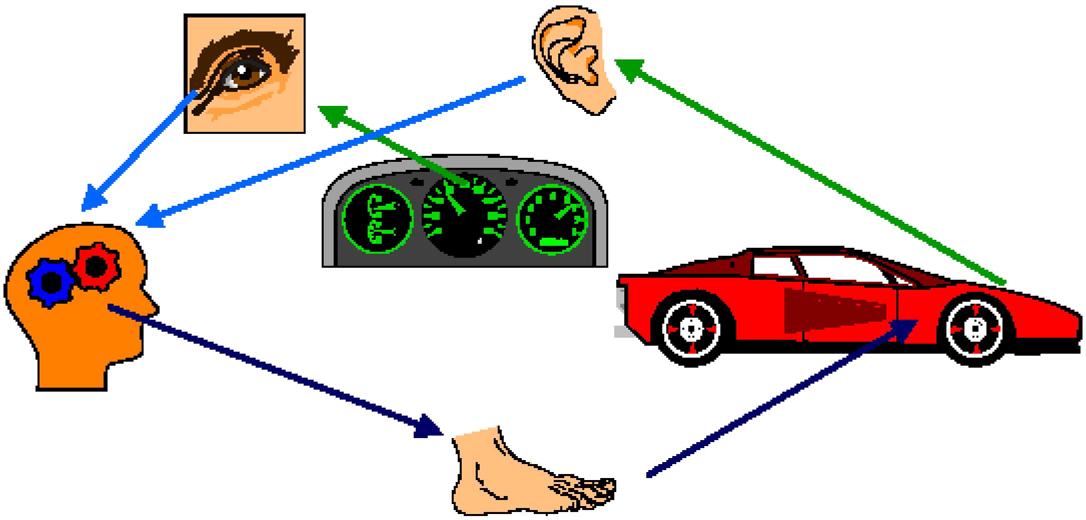


Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Controllo (manuale) di livello (in anello chiuso)



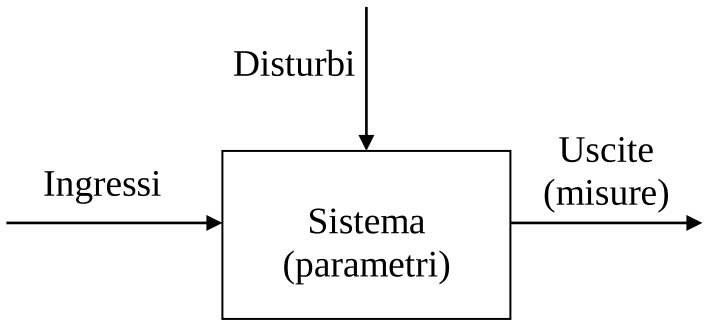
Controllo (manuale) di velocità (in anello chiuso)



Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

In ciascuno dei precedenti esempi si può individuare un *plant* o sistema controllato. In generale un sistema è un complesso di più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezze soggette a variare nel tempo (*variabili*).

Si definisce dunque *sistema* un insieme complesso e organizzato di componenti (sottosistemi) legati da relazioni di causa e effetto.



In un sistema si distinguono in genere due tipi di variabili:

1. *Variabili di ingresso*: sono le variabili indipendenti o cause.
2. *Variabili di uscita*: sono le variabili dipendenti o effetti.

Pertanto si definisce *sistema orientato* un sistema in cui le variabili siano state suddivise in variabili di ingresso e variabili di uscita.

Tra le variabili di ingresso di un sistema si distinguono due tipi di variabili:

1. *variabili manipolabili*: sono le variabili di ingresso il cui andamento nel tempo può essere arbitrariamente imposto;
2. *variabili non manipolabili* o *disturbi*: sono le variabili di ingresso il cui andamento nel tempo non può essere influenzato dal sistema di controllo, in quanto casuali o assegnabili ad arbitrio solo da parte di un altro operatore.

In definitiva, solo le variabili manipolabili sono gli *ingressi veri e propri del sistema* e possono essere comandati, cioè il loro andamento può essere imposto dal progettista. Alcuni esempi sono la posizione del pedale acceleratore nel caso del controllo di velocità, la tensione di alimentazione di un motore elettrico, l'angolo del timone di un natante.

In contrasto con gli ingressi manipolabili, i *disturbi* agiscono indipendentemente dalle azioni esterne. Alcuni esempi sono il vento nel caso del controllo di velocità, la coppia

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

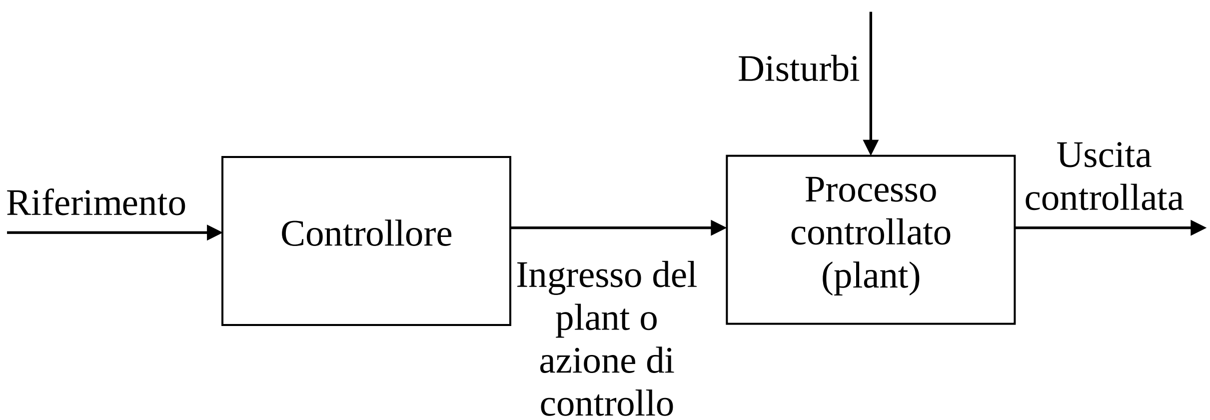
resistente nel caso del controllo di un motore elettrico, la corrente in mare nel caso di un natante.

L'orientamento del sistema di interesse è completato aggiungendo agli ingressi le *uscite*, che modellano i segnali che il progettista intende controllare (o far sì che si comportino secondo determinate specifiche di progetto). Alcuni esempi sono la velocità nel caso del controllo di velocità di un autoveicolo, l'angolo dell'asse del motore nel caso del controllo di un motore elettrico e l'angolo di rotta nel caso del natante.

Le uscite di un sistema possono essere misurate con appositi sensori o trasduttori che forniscono pertanto le cosiddette uscite misurate. Queste vengono anche dette *misure*. Alcuni esempi sono la posizione dell'ago del tachimetro nel caso del controllo di velocità di un autoveicolo, la posizione del potenziometro nel caso del controllo di un motore elettrico e la lettura della bussola nel caso del natante.

Si definiscono altresì *parametri* le "costanti" che appaiono nel modello del sistema.

In genere un sistema di controllo automatico viene progettato in modo che le variabili di uscita seguano il più fedelmente possibile l'andamento imposto da una o più variabili d'ingresso (riferimenti) nonostante la presenza di disturbi e/o di variazioni parametriche.



Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

PARADIGMA FONDAMENTALE DEI CONTROLLI AUTOMATICI: CONTROLLO IN RETROAZIONE

Il principio della controreazione o retroazione (feedback) sfrutta ai fini del controllo l’informazione sul comportamento attuale del processo: viene utilizzato lo scostamento dell’uscita dal valore desiderato. Pertanto, per applicare il controllo in retroazione la grandezza controllata deve essere accessibile alla misura. Evidentemente, la precisione di tale misura stabilisce il limite di precisione del sistema di controllo.

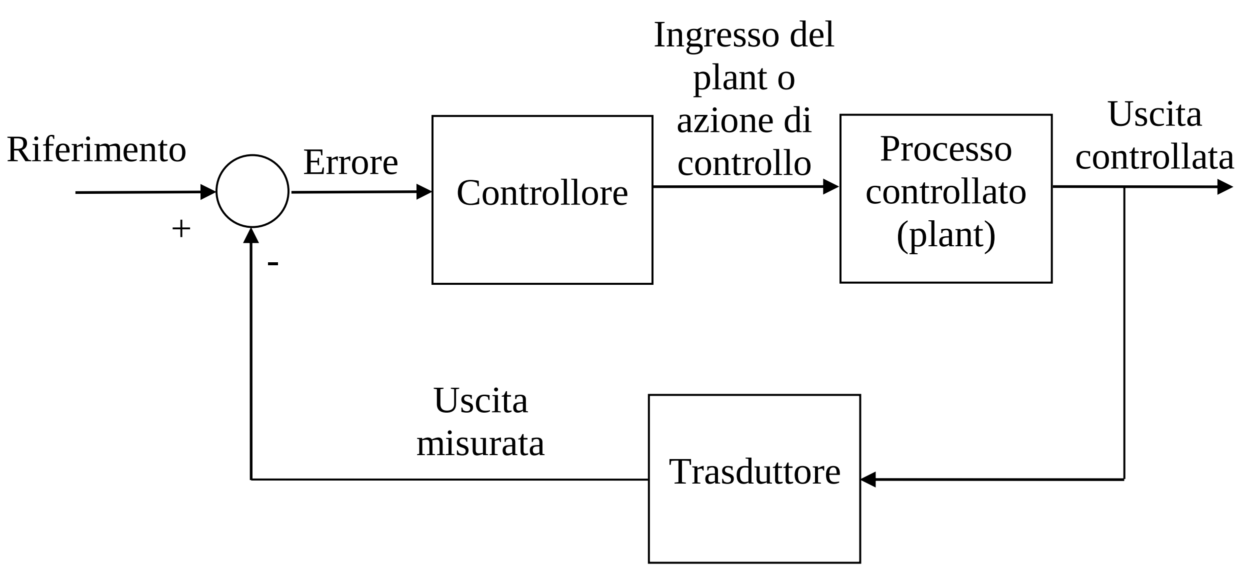
Quindi il controllo in retroazione si basa sui seguenti passi:

1. *misura* della grandezza controllata;
2. *confronto* con il valore desiderato;
3. *elaborazione* dello scarto per produrre la grandezza controllante.

Elenchiamo nel seguito alcuni componenti fondamentali dei sistemi di controllo a controreazione.

- Trasduttori
- Amplificatori
- Attuatori od esecutori
- Linee di trasmissione
- Generatori di riferimento

Lo schema generale di un sistema di controllo a controreazione è, nel caso di un sistema con un ingresso ed un’uscita, il seguente.



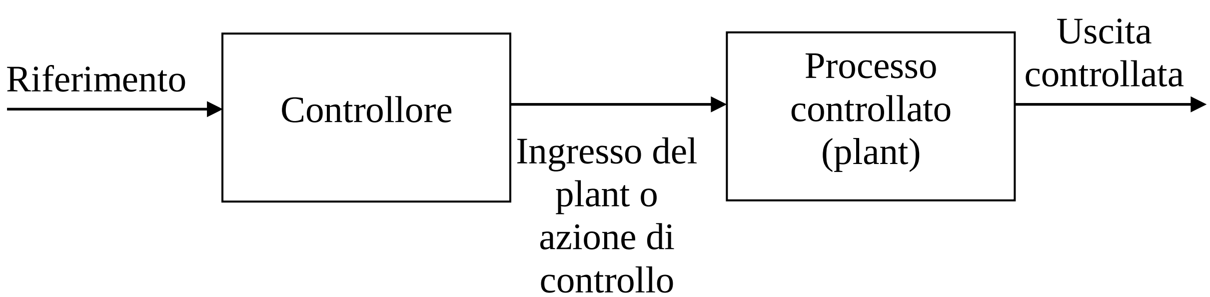
Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L’autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l’autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

dove nel controllore sono stati inglobati, oltre al regolatore vero e proprio, anche gli eventuali amplificatori e gli organi di attuazione.

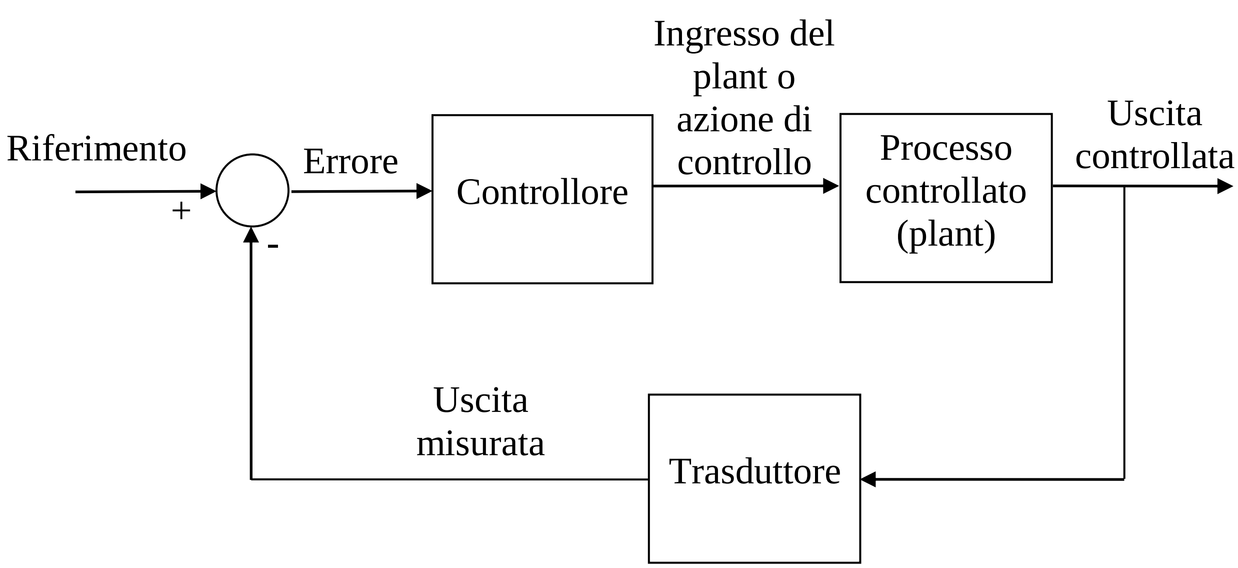
Osserviamo inoltre che in generale riferimento ed uscita controllata sono grandezze fisiche non omogenee: occorre allora trasformare l'uscita in una grandezza fisica confrontabile con l'ingresso. La catena di retroazione contiene quindi un organo di trasduzione, il cui compito è quello di rendere l'uscita confrontabile con l'ingresso. Generalmente il trasduttore è caratterizzato da un blocco statico, modellato con un guadagno. Nel caso di segnali elettrici, il blocco comparatore è generalmente un amplificatore differenziale.

In definitiva nei controlli automatici si distingue tra sistemi di controllo in anello aperto e controllo in anello chiuso.

Schema di controllo in anello aperto (in catena aperta)



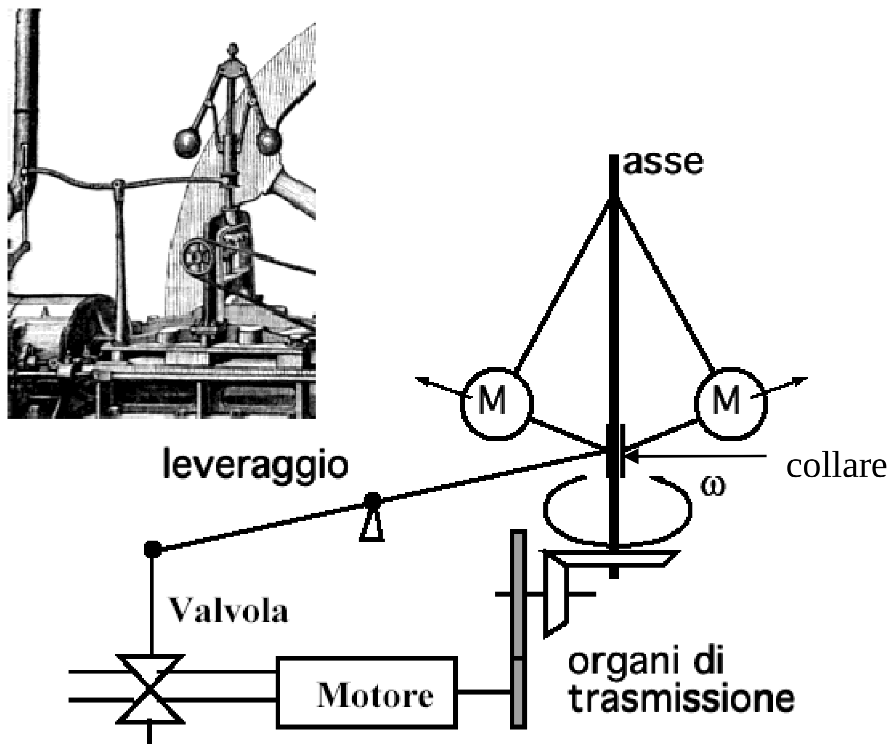
Schema di controllo in anello chiuso (in catena chiusa)



Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

ESEMPIO DI CONTROLLO AUTOMATICO IN RETROAZIONE: REGOLATORE CENTRIFUGO DI WATT.

La prima applicazione importante di controllo automatico in retroazione fu sviluppata da Watt, il quale ideò nel 1788 il regolatore centrifugo e lo applicò al motore a vapore per regolare automaticamente la spinta prodotta dal vapore in funzione della velocità di rotazione. La diffusione di questo regolatore automatico fu alla base della rivoluzione industriale, poiché per la prima volta con esso si utilizzò la tecnologia meccanica non solo per potenziare il funzionamento del motore a vapore ma per controllarlo, con notevole incremento dell'affidabilità del motore a vapore. Il regolatore è schematizzato in figura.



L'obiettivo di questo sistema di regolazione è mantenere costante (controllare) la velocità angolare del motore (uscita) per mezzo della portata di vapore (ingresso) immesso attraverso la valvola a farfalla.

Il funzionamento si basa sull'effetto della forza centrifuga sulle masse M.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Se la velocità della macchina aumenta rispetto al suo valore nominale, le masse si allontanano dall'asse verticale e, attraverso il sistema di leveraggi, la valvola si chiude un po', diminuendo il vapore immesso nel motore. Quindi il motore rallenta e la velocità diminuisce.

Se la velocità della macchina diminuisce rispetto al suo valore nominale, le masse si avvicinano all'asse verticale e, attraverso il sistema di leveraggi, la valvola si apre un po', aumentando il vapore immesso nel motore. Quindi il motore accelera e la velocità aumenta.

In questo modo si ottiene la regolazione automatica della velocità, che resta costante.

In definitiva, il sistema è fondato sul principio di retroazione: la velocità viene retroazionata per mezzo dell'asse verticale in rotazione solidale all'albero motore e del sistema di leveraggi. La sua misura comanda l'ammissione del vapore che controlla la velocità stessa.

Circa un secolo dopo l'ideazione di Watt del regolatore centrifugo, nel 1868 Maxwell ne riportò una analisi matematica. Maxwell determinò un modello non lineare stazionario del terzo ordine del regolatore centrifugo e verificò che il modello linearizzato del terzo ordine è del tipo:

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t)+a_1\frac{d^2}{dt^2}y(t)+a_2\frac{d}{dt}y(t)+a_3y(t)=0$$

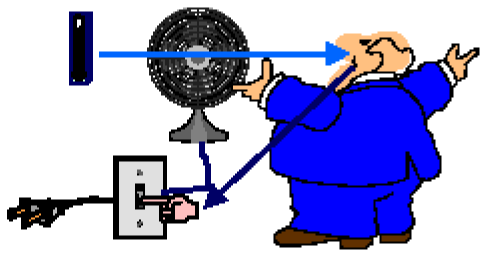
dove y(t) è la variazione rispetto all'equilibrio della posizione angolare del motore. Maxwell inoltre determinò le condizioni di stabilità del regolatore centrifugo, dimostrando che esse coincidevano con l'imporre che le tre radici dell'equazione caratteristica associata

$$s^3+a_1s^2+a_2s+a_3=0$$

fossero disposte nel semipiano sinistro di Gauss. Successivamente Routh generalizzò questo studio a tutti i sistemi lineari e tempo invarianti.

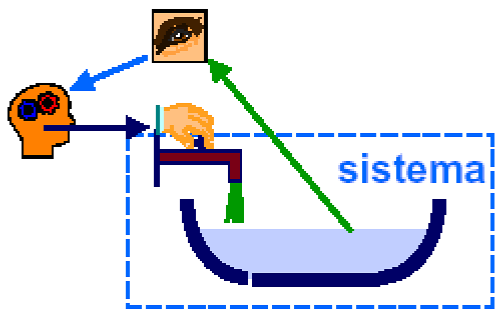
Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

ESEMPI DI CONTROLLO MANUALE E AUTOMATICO:

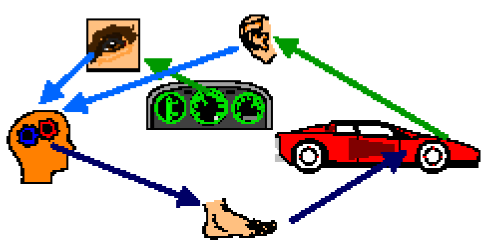


Regolazione della temperatura di una stanza
Controllo (manuale) in catena aperta
Anello aperto, azione diretta

Azione basata su un modello ed informazioni iniziali sul sistema

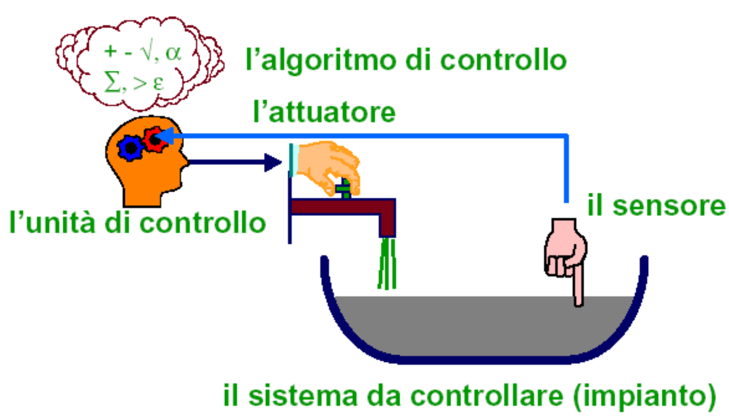


Regolazione del livello di una vasca
Controllo (manuale) in anello chiuso
Azione basata su un modello ed informazioni continue sul sistema



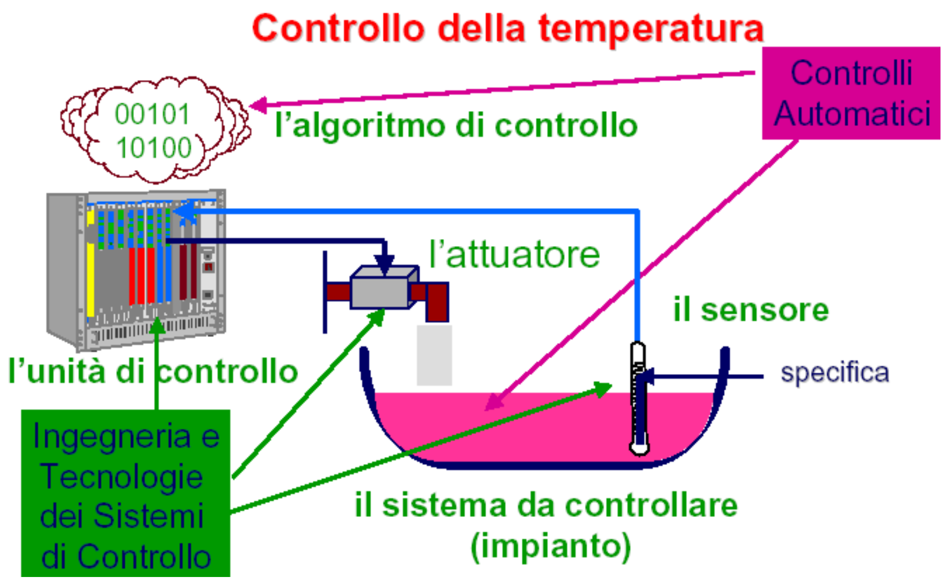
Controllo della velocità di un autoveicolo
Controllo (manuale) in anello chiuso
Azione basata su un modello ed informazioni continue sul sistema
Su alcuni veicoli è anche implementato il controllo automatico della velocità (cruise control)

Elementi chiave di un sistema di controllo



Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Dal controllo manuale al controllo automatico.

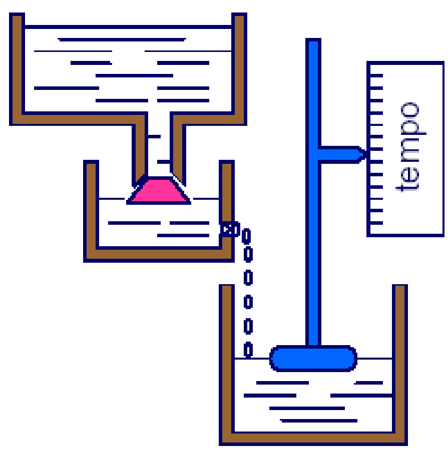


PICCOLA STORIA DEI CONTROLLI AUTOMATICI

L'uomo ha sempre tentato di costruire sistemi il cui comportamento fosse automatizzato per mezzo di un sistema di controllo. L'approccio è stato empirico ed inventivo fino alla metà del XIX secolo. Nella storia dei controlli automatici si distinguono tre fasi fondamentali: gli albori, il periodo classico e il periodo moderno.

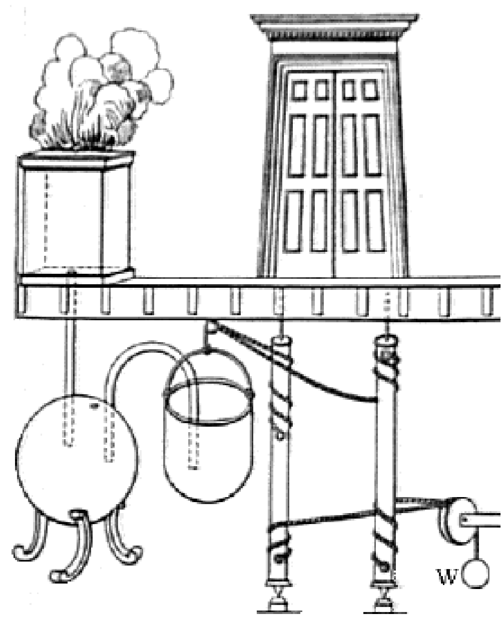
- *Albori*
  - Ctesibio (III sec. a.C.) - Orologio ad acqua

    L'acqua gocciola con un flusso costante in un contenitore che misura il tempo in base all'altezza del liquido. Il contenitore a monte viene tenuto a livello costante (in modo che l'acqua ne fuoriesca con flusso costante) per mezzo di una valvola comandata da un galleggiante del tutto simile a quella degli odierni water.



Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

- Erone di Alessandria (I sec. a.C.) - Apertura e chiusura automatica delle porte di un tempio.
  L’espansione dell’aria calda prodotta dal fuoco sull’altare mette in pressione l’acqua di un serbatoio che, attraverso un sifone, riempie un secchio sospeso. La discesa del secchio fa aprire le porte del tempio.
  Se il fuoco viene spento, la pressione nel recipiente diminuisce e l’acqua ritorna indietro nel serbatoio, svuotando il secchio. Allora il peso w (in basso a destra) cadendo fa chiudere le porte.



- Papin (XVII sec. d. C.) - Valvola di sicurezza

- Drebbel (1620 circa) - Incubatrice per uova

- James Watt (1788) - Macchina a vapore, basata sul regolatore centrifugo già impiegato da Lee (1745) nei mulini a vento.

- James Clerk Maxwell (1868) - “*On governors*”: criterio di stabilità per i sistemi lineari tempoinvarianti descritti da equazioni differenziali del terzo ordine (studio matematico e analisi della stabilità del regolatore centrifugo di Watt).

- Edward Routh (1874), Adolf Hurwitz (1877) - Generalizzazione del criterio di stabilità di Maxwell a sistemi (LTI) di ordine superiore (criterio di stabilità di Routh-Hurwitz).

- Carl Wilhelm e Werner Siemens (fine ‘900) – Brevetto di un regolatore centrifugo con azione integrale per la regolazione automatica della coppia dei motori delle locomotive e dei motori propulsori delle navi.

- Chebyshev e Lyapounov (fine ‘900) - Analisi della stabilità dei sistemi non lineari.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L’autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l’autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

- *Periodo classico (1930-1950)*
    - Black (1927) - Analisi dell'amplificatore in retroazione negativa.

    - Servomeccanismi, sistemi asserviti (1934) - Esempi derivati: servosterzo, servofreno.

    - Bode e Nyquist, Bell Telephone Laboratories, Nichols (1935-1948) - Metodi di progetto di un sistema di controllo automatico in frequenza.

    - Evans (1948) - Metodi di progettazione più avanzata: luogo delle radici.

- *Periodo moderno (dal 1950 ad oggi)*
    - Kalman (1960) - Spazio di stato, raggiungibilità e osservabilità, controllo e filtraggio ottimo.

    - Bellmann e Pontryagin (1960) - Controllo ottimo, programmazione dinamica.

    - Corsa allo spazio (1958-1969) - Gli Sputnik (messa in orbita di un satellite). L'allunaggio morbido (Controllo ottimo).

    - Calcolatori e Microprocessori (dopo il 1965) - Controllo digitale, controllo con PLC (Controllori a Logica Programmabile), CAD (Computer Aided Diagnosis), diffusione generalizzata dell'automazione industriale.

    - Zadeh (1965) - Teoria della logica fuzzy. Nuovi modelli, sistemi complessi, controllo intelligente.

    - Controllo decentralizzato e controllo distribuito a livello industriale (dal 1975).

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

SITUAZIONE ATTUALE E PROSPETTIVE DI SVILUPPO DEI SISTEMI DI CONTROLLO

Nel seguito elenchiamo alcuni settori ed esempi di applicazioni dei moltissimi e sofisticati sistemi di controllo presenti sia in settori industriali che in settori civili.

Applicazioni in settori ingegneristici industriali

- Settore Manifatturiero
  - linee di assemblaggio automobili, elettrodomestici, …
  - robot e macchine per lavorazione e confezionamento

- Settore Chimico
  - Petrolchimico
  - materie plastiche, vernici, solventi, detersivi,…
  - cementifici

- Settore Energetico
  - centrali elettriche
  - sistemi di distribuzione energia

- Settore Trasporti ed Aeronautico
  - veicoli spaziali ed aerei
  - treni e metropolitane
  - navi

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Applicazioni in settori ingegneristici civili

- Autoveicoli
  - servosterzo, servofreno
  - ABS, controllo di assetto
  - controllo dell'iniezione
  - sospensioni attive
  - climatizzatore

- Elettronica di Consumo
  - macchine fotografiche
  - videocamere
  - telefoni cellulari
  - lettori CD, DVD

- Elettrodomestici
  - Lavatrici
  - Lavastoviglie
  - Robot aspirapolvere

- Domotica
  - controllo remoto delle attività domestiche
  - monitoraggio e controllo consumi energetici

- Medicina e chirurgia
  - controllo automatizzato dell'erogazione del farmaco
  - sistemi robotizzati e teleoperati per chirurgia minimamente invasiva
  - controllo del movimento di protesi attive per arti

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

PROGETTO DI UN SISTEMA DI CONTROLLO

- definizione delle specifiche
    - obiettivi da conseguire (qualità del controllo, costi, …)

- modellazione del sistema
    - scelta del dettaglio
    - orientamento
    - tipologia di rappresentazione
    - “costruzione” del modello
    - validazione mediante simulazione

- analisi del sistema
    - studio delle proprietà

- sintesi della legge di controllo
    - verifica delle proprietà del sistema controllato
    - valutazione della complessità e stima del carico computazionale

- simulazione del sistema controllato
    - condizioni ideali
    - condizioni realistiche: modello impianto più complesso (ritardi, disturbi)
    - analisi di robustezza: sensibilità alle variazioni parametriche

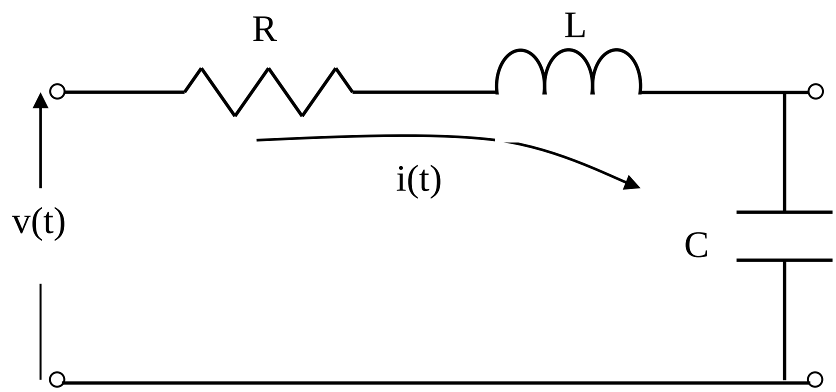
- introduzione degli elementi tecnologici
    - sensori, attuatori
    - dispositivi di elaborazione

- sperimentazione
    - costruzione di un prototipo definitivo
    - ingegnerizzazione
    - produzione in serie

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L’autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l’autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

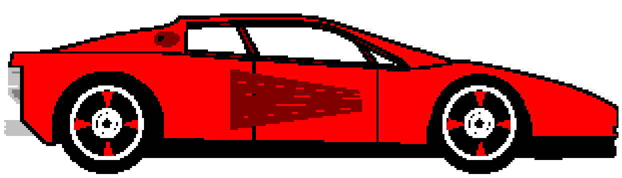
ESEMPI DI ORIENTAMENTO

Si consideri come esempio il circuito RLC seguente.



Evidentemente l'orientamento del sistema, ovvero l'individuazione degli ingressi e delle uscite dipende dalle scelte del progettista. In effetti ciascuna delle due variabili i(t) e v(t) può assumere entrambi i ruoli. Se ad esempio si collega ai morsetti del circuito un generatore di tensione v(t) si può studiare l'andamento della corrente del circuito rispetto a v(t). In tal caso dunque v(t) è l'ingresso e i(t) l'uscita del sistema.

Si consideri ora l'ulteriore esempio del "sistema" autoveicolo.

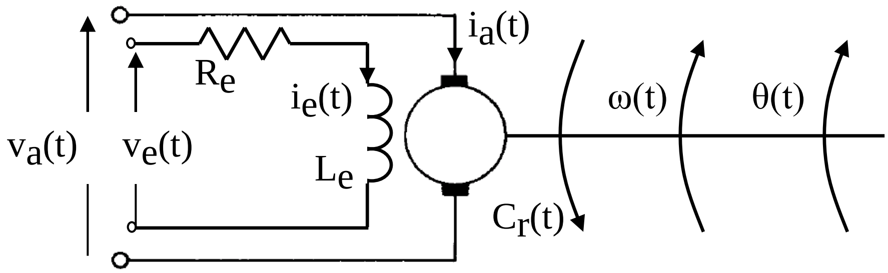


Anche in questo caso l'individuazione degli ingressi e delle uscite dipende dalle scelte del progettista. Ci si può ad esempio chiedere se la coppia erogata dal motore sia un ingresso o una uscita del sistema. Evidentemente per il veicolo essa è un ingresso, mentre per il sistema motore è una uscita.

Questo esempio mostra quindi come in un sistema complesso alcune uscite di sottosistemi possano essere ingressi di altri sottosistemi.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Si consideri ora lo schema semplificato in figura di un motore in corrente continua.

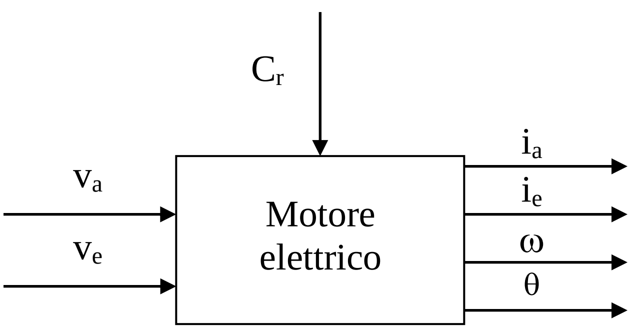


Le variabili di interesse sono la tensione e la corrente di armatura v_a e i_a, la tensione e la corrente di campo (o eccitazione) v_e e i_e, la coppia resistente all'albero C_r, la velocità e la posizione angolare del rotore ω e θ.

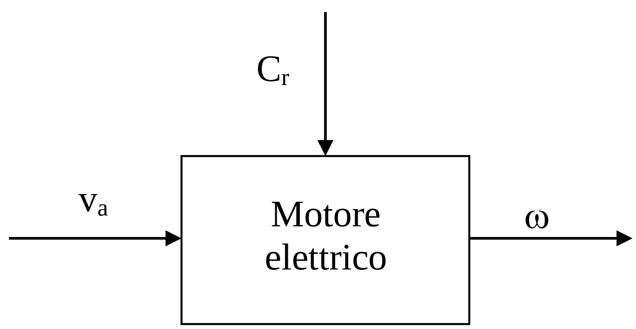
L'orientamento del sistema fornisce le seguenti variabili:

- Ingressi (cause): v_a,v_e e C_r;
- Uscite (effetti): i_a, i_e, ω e θ;
- Variabili manipolabili: v_a e v_e;
- Disturbi: c_r.

È dunque possibile una rappresentazione di tipo MIMO (Multi Input Multi Output) del motore elettrico, ossia con diversi ingressi e uscite, come nella figura in basso a sinistra.



(a)

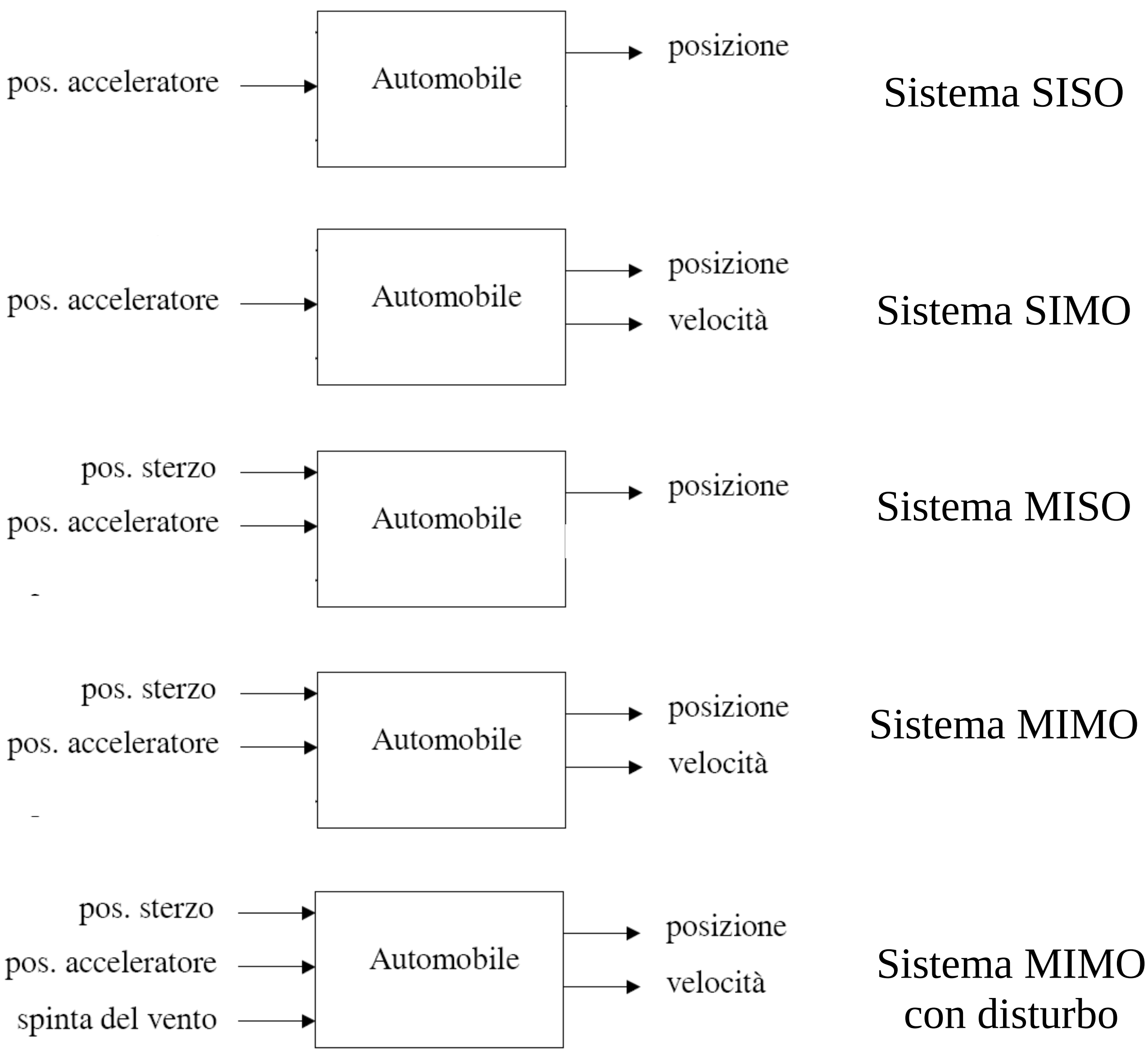


(b)

È anche possibile una rappresentazione del sistema di tipo SISO (Single Input Single Output), ossia con un ingresso, un disturbo e una uscita se si suppone di considerare v_e costante (v_a costante) e si sceglie ad esempio la sola velocità angolare come uscita. Il sistema motore elettrico in questo caso si dice controllato in armatura (eccitazione).

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Un altro classico esempio di *plant* che può essere modellato come sistema SISO o MIMO è l'autovettura che si muove lungo una strada.



Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

MODELLO MATEMATICO DI UN SISTEMA

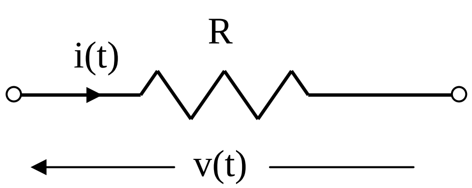
Il *modello matematico di un sistema* è l'insieme di equazioni e di parametri che permettono di determinare gli andamenti nel tempo delle uscite, noti quelli degli ingressi.

Il modello matematico è sempre un *compromesso tra precisione e semplicità*: è inutile infatti ricorrere a modelli sofisticati quando i valori dei parametri che in essi compaiono si conoscono solo approssimativamente.

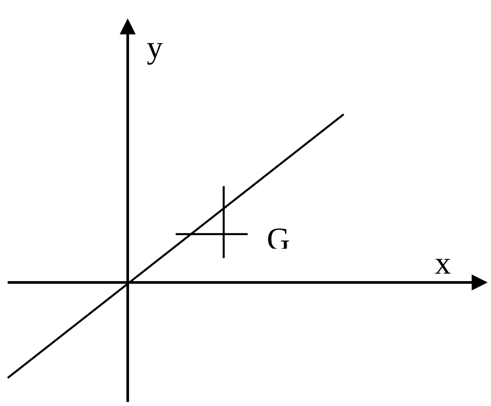
Uno stesso sistema può essere dunque rappresentato da diversi modelli, a seconda del grado di precisione con cui esso viene descritto. In particolare, si possono considerare modelli statici o modelli dinamici di un generico sistema.

Un *modello statico o puramente algebrico* di un sistema descrive il legame fra i valori degli ingressi, supposti costanti, e i valori delle uscite una volta che il sistema abbia raggiunto la condizione di *regime stazionario*, cioè la condizione di funzionamento in cui tutti i segnali sono costanti.

Un sistema statico è rappresentato matematicamente da equazioni algebriche che ne costituiscono il modello matematico.



Un classico esempio di un sistema statico è il resistore avente resistenza R in figura. Scegliendo come ingresso la tensione applicata v(t) e come uscita la corrente che scorre nella resistenza i(t), si ottiene la caratteristica statica del sistema:



$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

ossia, scegliendo come ingresso x(t)=v(t), come uscita y(t)=i(t) e ponendo $G=R^{-1}$, si ha il classico modello di un sistema statico lineare tempoinvariante di guadagno G:

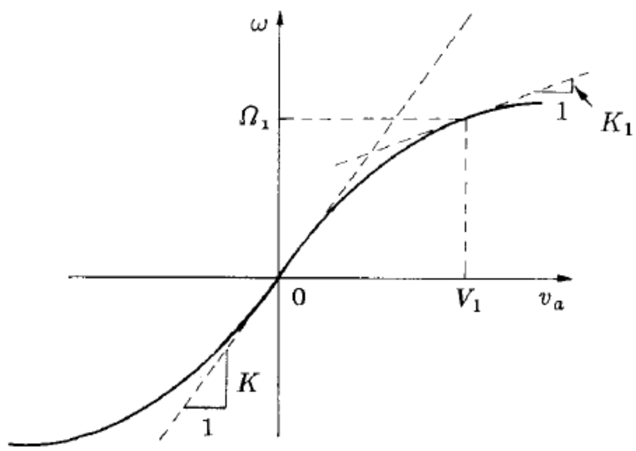
$$y(t) = Gx(t),$$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

che evidentemente individua un'equazione algebrica.

Si osserva che la precedente caratteristica statica permette di conoscere il valore corrente dell'uscita in base al valore corrente dell'ingresso. Per tale motivo si dice che un sistema statico è privo di memoria.

Vediamo ora un esempio di sistema statico con caratteristica non lineare. In figura è rappresentata la caratteristica statica del motore elettrico in corrente continua controllato in armatura.



La caratteristica statica ingresso-uscita è esprimibile con una funzione lineare dell'ingresso:

$$\omega = f\,(v_a)$$

Si può anche effettuare una approssimazione lineare nell'intorno di un punto di lavoro, per esempio l'origine:

$$\omega = K\,v_a;$$

Una linearizzazione nell'intorno di un punto di lavoro qualsiasi è invece ottenibile con una approssimazione di Taylor del primo ordine della curva caratteristica:

$$\omega - \Omega_1 = K_1\,(v_a - V_1) \quad \leftrightarrow \quad \Delta\,\omega = K_1\,\Delta v_a$$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Come nel caso del motore elettrico con tensioni di armatura e eccitazione entrambe variabili, il modello statico di un sistema MIMO (Multi Input Multi Output) consiste in più funzioni (tante quante sono le uscite) di più variabili (tante quanti sono gli ingressi), cioè

$$\begin{gathered} y_1 = f_1\,(x_1,\dots,x_n) \\ y_2 = f_2\,(x_1,\dots,x_n) \\ \dots \\ y_m = f_m\,(x_1,\dots,x_n) \end{gathered}$$

Una rappresentazione grafica di sistema MIMO è schematizzata nella figura seguente.

Invece il modello statico di un sistema SISO (Single Input Single Output) consiste in una funzione (ha un'unica uscita) di una variabile (ha un solo ingresso), esattamente come nel caso del motore elettrico controllato in armatura o eccitazione, cioè:

$$y = f\,(\,x\,)$$

ed ha una rappresentazione grafica del tipo in figura.

Un *modello matematico statico* presuppone che il valore corrente dell'uscita dipenda solo dal valore corrente dell'ingresso. Ciò accade raramente in natura. Pertanto un modello statico di un sistema che non è statico ne individua una visione approssimata che non fornisce alcuna informazione sul *regime transitorio* del sistema modellato, cioè non fornisce indicazioni sull'andamento nel tempo delle uscite durante il passaggio da uno stato stazionario ad un altro.

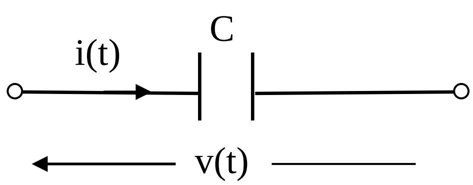
Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Un modello si dice dinamico quando esso non è statico, ovvero quando non il valore y(t) assunto dall'uscita al tempo t non dipende solo dal valore u(t) assunto dall'ingresso al tempo t.

I sistemi ad avanzamento temporale possono essere classificati in sistemi tempo continui e in sistemi tempo discreti: i primi sono rappresentati da equazioni differenziali, i secondi da equazioni alle differenze.

Un *modello dinamico* tempo continuo è quindi costituito da una o più equazioni differenziali che esprimono un legame matematico fra le variabili di ingresso, di uscita e le loro derivate rispetto al tempo. Il modello dinamico di un sistema permette quindi di determinare l'andamento del segnale di uscita corrispondente a un dato segnale di ingresso, cioè permette di determinare la *risposta* del sistema ad una data *eccitazione*, noto l'andamento dell'ingresso in tutto l'intervallo temporale [0,t] e note le condizioni iniziali, ovvero il valore della uscita e delle sue derivate al tempo 0 sino a un ordine n-1 essendo n un numero naturale detto ordine del sistema.

Vediamo un classico esempio di modello dinamico. Consideriamo il condensatore in figura di capacità C, con legge fondamentale



$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}.$$

Orientiamo il sistema scegliendo come ingresso la corrente che scorre nel condensatore

$$x(t)=i(t)$$

e come uscita la tensione ai suoi capi

$$y(t)=v(t).$$

Il modello del sistema è dunque:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{C}x(t)$$

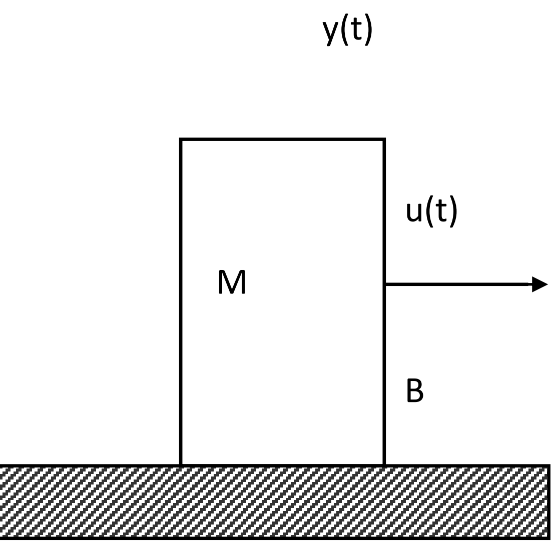
Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

che è una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del primo ordine. Risolvendo l'equazione si ha il modello ingresso-uscita del sistema, che è evidentemente dinamico:

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_0^t x(\tau)d\tau + y(0)\,.$$

Come si vede, nel sistema dinamico in questione per conoscere il valore corrente dell'uscita è necessaria la conoscenza della condizione iniziale (valore dell'uscita non derivata) nonché dell'ingresso in tutto l'intervallo [0,t], ossia è necessaria la conoscenza della *storia* del sistema. Per questo motivo si dice che un sistema dinamico ha memoria.

Vediamo un altro classico esempio di sistema dinamico. Consideriamo una massa M che si muove, spinta da una forza esterna f(t), su un piano con attrito B. L'equilibrio delle forze si scrive:



n.

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} = u(t)$$

Orientiamo il sistema scegliendo come ingresso la forza u(t) e come uscita lo spostamento della massa y(t). Per determinare l'uscita è necessario integrare tale equazione differenziale, il che richiede la conoscenza dell'andamento dell'ingresso in tutto l'intervallo [0,t] e la conoscenza della posizione iniziale e della velocità iniziale, ovvero di y(0) e y'(0). In questo caso il sistema è dinamico del secondo ordine.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Un sistema si dice proprio o non anticipativo (improprio o anticipativo in caso contrario) se per esso vale il principio di causalità, ovvero se l'effetto non precede nel tempo la causa che lo genera.

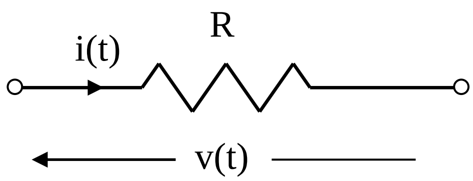
È possibile dimostrare che un sistema dinamico espresso da una relazione ingresso uscita del tipo:

$$h(y(t), \dot{y}(t), ..., y^{(n)}(t), u(t), \dot{u}(t), ..., u^{(m)}(t), t) = 0$$

è proprio se e solo se risulta $m \leq n$.

Un modello matematico (o un sistema) si dice *lineare* quando soddisfa la proprietà di *sovrapposizione degli effetti*. In altre parole, considerato il sistema in figura, detti $x_1(t)$ e $x_2(t)$ due ingressi qualsiasi e dette $y_1(t)$ e $y_2(t)$ le rispettive uscite del sistema, applicando in ingresso al sistema il segnale $x(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$ essendo a e b due numeri reali qualsiasi, la risposta del sistema vale $y(t)=ay_1(t)+by_2(t)$.

Se il sistema non soddisfa il principio di sovrapposizione degli effetti si dice non lineare.



Consideriamo ancora il resistore R in figura, descritto dal modello statico ingresso-uscita:

$$y(t) = Gx(t),$$

dove si è posto $x(t)=v(t)$, $y(t)=i(t)$ e $G=R^{-1}$.

Evidentemente applicando in ingresso la tensione $x_1(t)$ la risposta del sistema vale $y_1(t)=Gx_1(t)$, così come in risposta all'ingresso $x_2(t)$ il sistema evolve con uscita $y_2(t)=Gx_2(t)$. Applicando in ingresso la tensione $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ si ha quindi un'uscita

$$y(t)=Gx(t)=G(x_1(t)+x_2(t))=Gx_1(t)+Gx_2(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

e dunque il modello è lineare, come è evidente se si rappresenta la sua caratteristica statica, che è una retta nel piano (x,y) passante per l'origine di pendenza G.

Si osservi invece che il sistema statico:

$$y(t) = ax(t) + b$$

con a e b parametri qualsiasi non nulli, x(t) e y(t) rispettivamente ingresso e uscita, non è lineare, poiché non verifica il principio di sovrapposizione degli effetti. Infatti la sua caratteristica statica è una retta nel piano (x,y) non passante per l'origine.

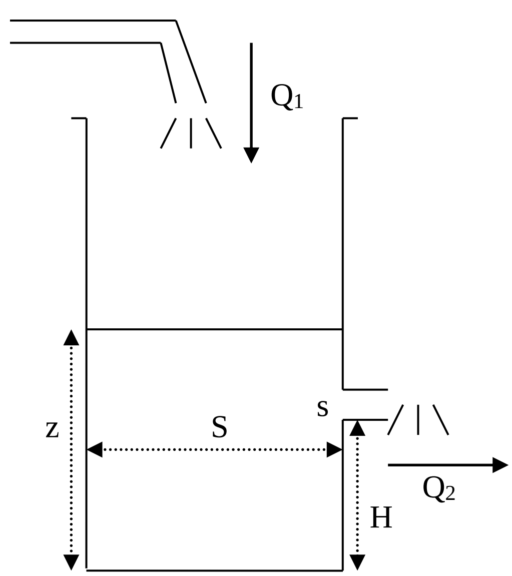
Si osservi poi che il sistema statico:

$$y(t) = t^3 x(t)$$

con x(t) e y(t) rispettivamente ingresso e uscita, è lineare, poiché verifica il principio di sovrapposizione degli effetti, ma è non stazionario.

Molti sistemi ammettono diversi modelli, ad esempio sono rappresentati da un modello non lineare che può essere approssimato da un modello matematico lineare purché i valori delle variabili non escano da determinati campi.

ESEMPIO



Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Si consideri il sistema idraulico in figura, costituito da un serbatoio che, attraverso un condotto in ingresso, viene riempito di liquido, con portata $Q_1(t)$ [m^3 s^{-1}] e flusso $q_1(t)$ [m s^{-1}]. Il liquido fuoriesce da un condotto di uscita ad altezza H, con portata $Q_2(t)$ [m^3 s^{-1}] e flusso $q_2(t)$ [m s^{-1}].

Il liquido contenuto nel sistema è supposto incomprimibile; inoltre si considera nullo l'attrito viscoso caratteristico del moto del liquido. Si suppone che il serbatoio e il condotto di uscita siano perfettamente circolari ed abbiano sezioni rispettivamente pari a S e s (in m^2). La variabile di interesse è il livello *z* (in m) del liquido nel serbatoio.

Il modello matematico del sistema è il seguente (equazione di conservazione della massa):

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{1}{S}\left(Q_1(t) - Q_2(t)\right)$$

Supponiamo che l'uscita sia l'altezza del liquido:

$$y(t)=z(t)$$

e che l'ingresso sia la portata

$$x(t)=Q_1(t).$$

Dalla legge di Torricelli si ha

$$Q_2(t) = K_s\sqrt{z(t)}$$

dove K_s è una costante che dipende dalla sezione s del foro di uscita.

Il modello del sistema è dunque:

$$S\dot{y}(t) + K_s\sqrt{y(t)} = x(t)$$

che è chiaramente non lineare.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Supponiamo ora che il battente sia sufficientemente piccolo, in modo da approssimare:

$$\sqrt{z(t)} \approx z(t) \Rightarrow Q_2(t) \approx K_S z(t).$$

Il modello diventa ora:

$$S\dot{y}(t) + K_S y(t) = x(t)$$

ed è chiaramente lineare.

Tale modello è valido entro i limiti:

$$0 \leq z(t) \leq Z$$

È anche possibile rendere il modello tempodiscreto, ovvero considerando variabili che cambiano solo ad istanti di tempo pari a un multiplo naturale di un dato tempo di campionamento T. Infatti è sufficiente approssimare la derivata con un rapporto incrementale:

$$S\frac{y(K+1) - y(K)}{T} + K_S y(K) = x(K)$$

Ottenendo così l'equazione alle differenze:

$$y(K+1) = \left(1 - \frac{TK_S}{S}\right) y(K) + \frac{T}{S} x(K).$$

Questo esempio ci mostra quindi come uno stesso sistema dinamico sia rappresentabile con un modello tempo continuo o tempo discreto, ovvero con un modello lineare o non lineare.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Un modello matematico o un sistema, lineare o non lineare, si dice *stazionario* o *tempoinvariante* quando soddisfa la proprietà di traslazione nel tempo di cause ed effetti (principio di ripetibilità degli esperimenti), cioè quando, essendo il sistema inizialmente in quiete ed essendo

$$x_1(t),\dots,x_n(t)$$

l'insieme dei segnali di ingresso e

$$y_1(t),\dots,y_m(t)$$

le risposte ad essi corrispondenti, per ogni costante reale positiva T ai segnali traslati nel tempo

$$x_1(t - T),\dots,x_n(t - T)$$

corrispondono le risposte, ugualmente traslate nel tempo

$$y_1(t - T),\dots,y_m(t - T).$$

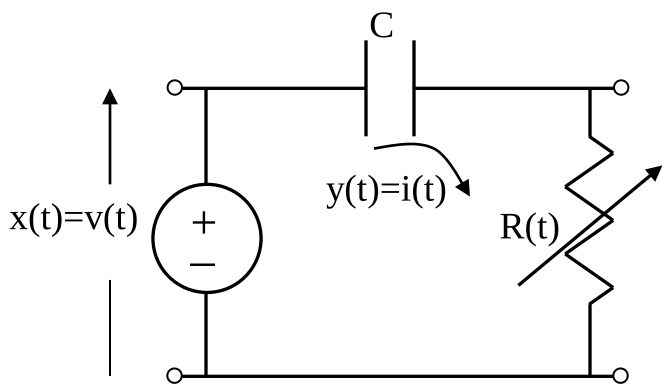
Quindi per un sistema stazionario vale la proprietà di *ripetibilità degli esperimenti*.

Un modello o un sistema che non soddisfa la proprietà di traslazione nel tempo di cause ed effetti si dice *non stazionario* o *tempovariante.*

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

ESEMPIO

Si consideri il circuito in figura.



Nell'ipotesi che il valore della resistenza R del circuito venga variato nel tempo con legge qualunque (ad esempio a seguito di una variazione di temperatura), ma assegnata a priori, indipendente dall'evoluzione del sistema, il sistema è lineare non stazionario.

Sia ad esempio

$$R = R_0(1+\alpha T)$$

dove T è la temperatura e supponiamo che la temperatura vari nel tempo con legge nota, ossia

$$T=T(t).$$

Ne consegue che

$$R=R(t).$$

Applicando la legge di Kirchoff delle tensioni e scegliendo l'ingresso x(t)=v(t) e l'uscita y(t)=i(t), si ottiene il seguente modello del sistema:

$$x(t) = \frac{1}{C}\int_0^t y(\tau)d\tau + R(t)y(t)$$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

ossia

$$R(t)\dot{y}(t)+\left(\dot{R}(t)+\frac{1}{C}\right)y(t)=\dot{x}(t)$$

che è una equazione differenziale lineare a coefficienti variabili nel tempo, dunque il sistema è tempovariante.

Supponendo che R sia fissa si ha dal precedente modello generale il modello tempoinvariante, ottenuto tenendo conto che $\dot{R}(t)=0$:

$$R\dot{y}(t)+\frac{1}{C}y(t)=\dot{x}(t)$$

CLASSIFICAZIONE DEI MODELLI MATEMATICI

In definitiva abbiamo la seguente classificazione dei modelli.

- statici/dinamici
    - modello matematico dei sistemi statici
        - equazioni algebriche (sistemi privi di memoria)
            - l'uscita del sistema dipende solo dal valore assunto dall'ingresso in quell'istante
            - esempio: relazione tra tensione e corrente in un resistore

    - modello matematico dei sistemi dinamici (a parametri concentrati)
        - equazioni differenziali (sistemi con memoria)
            - l'uscita del sistema non dipende solo dal valore assunto dall'ingresso in quell'istante, ma anche da quelli passati, oltre che dalla condizione iniziale
            - esempio: relazione tra tensione e corrente in un condensatore

- monovariabili (SISO)/multivariabili(MIMO)
    - un ingresso-una uscita/più ingressi-più uscite

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

- lineari/nonlineari
  - le variabili sono combinate linearmente/non linearmente nel modello che descrive il sistema
  - vale/non vale il principio di sovrapposizione degli effetti

- invarianti/tempovarianti
  - le loro caratteristiche sono costanti/variano nel tempo
  - vale/non vale il principio di ripetibilità degli esperimenti

- tempo continui/tempo discreti
  - equazioni differenziali ordinarie/equazioni alle differenze

- a parametri concentrati/distribuiti
  - equazioni differenziali ordinarie/alle derivate parziali

MODELLI DINAMICI TEMPO CONTINUI (CON EQUAZIONI DIFFERENZIALI)

Le equazioni differenziali sono dei legami algebrici tra una o più funzioni, per esempio *x(t), y(t),* ecc. e le loro derivate $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, ecc.

Le equazioni differenziali possono essere:

1. lineari a coefficienti costanti, che quindi modellano sistemi lineari stazionari:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

come ad esempio l'equazione

$$2\dot{y}(t) + 3y(t) = 2x(t).$$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

2. lineari (le variabili di ingresso x(t) e di uscita y(t) nonché le loro derivate sono combinate linearmente nell'equazione differenziale) a coefficienti variabili nel tempo, che quindi modellano sistemi lineari tempovarianti:

$$a_n(t)\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+...+a_1(t)\frac{dy(t)}{dt}+a_0(t)y(t)=$$
$$=b_m(t)\frac{d^m x(t)}{dt^m}+b_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+...+b_1(t)\frac{dx(t)}{dt}+b_0(t)x(t)$$

come ad esempio l'equazione

$$3t\dot{y}(t)+2\cos t\cdot y(t)=t^2x(t)\,;$$

3. non lineari a coefficienti costanti nel tempo, quindi modellano sistemi non lineari tempoinvarianti:

$$f\left(y(t),\dot{y}(t),\ddot{y}(t),...,x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t),...\right)=0$$

come ad esempio l'equazione

$$\dot{y}(t)y(t)+2\cos\left(y(t)\right)=x^2(t)\,;$$

4. non lineari (le variabili di ingresso x(t) e di uscita y(t) nonché le loro derivate non sono combinate linearmente nell'equazione differenziale) a coefficienti variabili nel tempo, quindi modellano sistemi non lineari non stazionari:

$$f\left(y(t),\dot{y}(t),\ddot{y}(t),...,x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t),...,t\right)=0$$

come ad esempio l'equazione

$$t\dot{y}(t)+2t^2\mathrm{tg}\left(y(t)\right)=t\dot{x}(t)\,;$$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

In questo corso si fa riferimento solo ad equazioni lineari differenziali a coefficienti costanti (caso 1.), cioè a modelli lineari tempoinvarianti. Segue un esempio di modello di un sistema del secondo ordine lineare tempoinvariante:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{x}(t) + 5x(t)\,.$$

Le equazioni differenziali vengono utilizzate per descrivere il comportamento dinamico di un sistema fisico. Conoscere l'equazione differenziale che descrive un sistema dinamico vuol dire conoscere completamente il sistema stesso.

Utilizzando l'equazione differenziale è possibile prevedere (cioè calcolare) l'andamento futuro dell'uscita *y(t)* del sistema, noto l'andamento dell'ingresso *x(t)*.

Nel caso del precedente modello, uno schema rappresentativo del sistema è anche il seguente.

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{x}(t) + 5x(t)} \xrightarrow{y(t)}$$

Noto l'ingresso *x(t)*, l'incognita dell'equazione differenziale è la funzione *y(t)*. Eseguire questo calcolo vuol dire risolvere l'equazione differenziale del sistema per quel particolare andamento della funzione di ingresso *x(t)*.

Dall'equazione differenziale è anche possibile ricavare la descrizione statica del sistema, è sufficiente porre uguali a zero tutti i coefficienti della parte dinamica, ossia dei termini derivati. Nel caso dell'esempio precedente si ha:

$$2y(t) = 5x(t) \;\rightarrow\; y(t) = \frac{5}{2}x(t)$$

Risolvendo l'equazione differenziale (ossia integrandola) è possibile anche tener conto delle condizioni iniziali del sistema (cioè dell'energia accumulata nel sistema all'istante iniziale).

Le equazioni differenziali si possono risolvere in vari modi. Il modo più efficiente, dal punto di vista dei controlli automatici, è quello di utilizzare le trasformate di Laplace.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

RICHIAMI SUI NUMERI COMPLESSI

Un numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali:

$$(x\,,\,y)$$

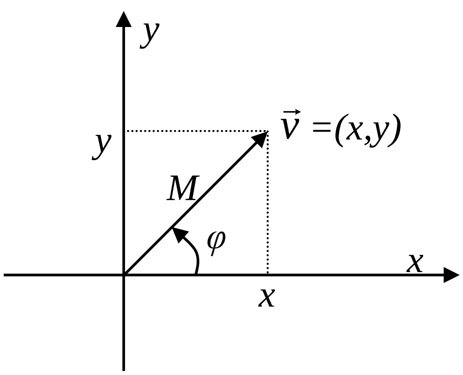
dove x è la parte reale e y è la parte immaginaria. Vi sono molti modi equivalenti per rappresentare i numeri complessi.

1) Se il numero complesso è espresso utilizzando il numero immaginario puro j

$$(x\,,\,y) = x + j\,y$$

il numero j indica la parte immaginaria del numero complesso. L'unità immaginaria j soddisfa le seguenti relazioni:

$$j = \sqrt{-1} \quad j^2 = -1 \quad j^3 = -j \quad j^4 = 1 \quad j^5 = j\,.$$

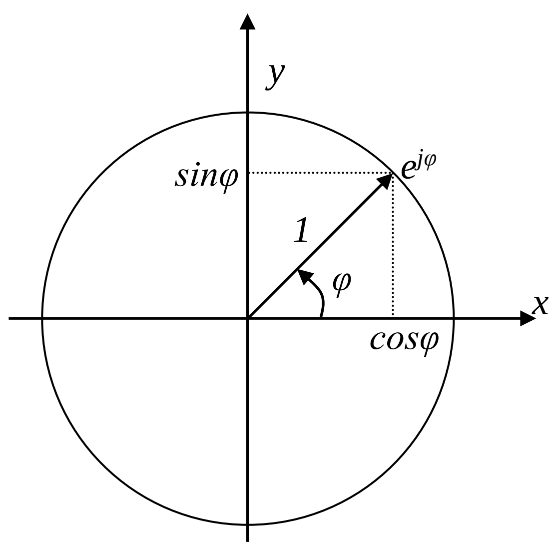


2) I numeri complessi $(x\,,\,y)$ possono essere messi in corrispondenza con i punti di un piano:

$$\vec{v} = (x\,,\,y) = x + j\,y$$

3) I punti del piano, a loro volta, possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i vettori $\vec{v}$ che collegano il punto $(x,\ y)$ all'origine. Il vettore $\vec{v}$ può essere espresso in *forma cartesiana* o in *forma polare*:

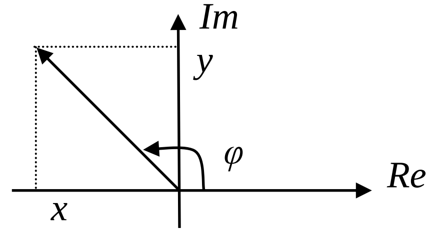
$$\vec{v} = (x\,,\,y) = x + j\,y = M \angle\ \varphi = M\,e^{j\varphi}.$$



Con M si è indicato il modulo e con φ la fase del vettore $\vec{v}$.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

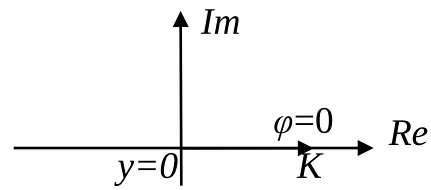
4) \Il numero complesso $e^{j\varphi}$ rappresenta un vettore a modulo unitario e fase φ. Vale la relazione:



$$e^{j\varphi} = cos\varphi + j\ sin\varphi$$

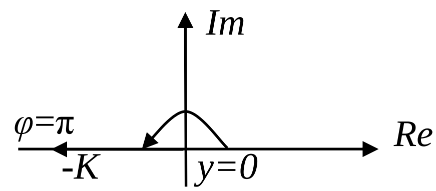
5) La fase φ di un vettore $\vec{v}$ del piano, e quindi la fase φ del corrispondente numero complesso $x + j\ y$, si misura in senso antiorario rispetto al semiasse reale positivo del piano complesso.

La fase dei numeri reali positivi K>0 è nulla:



$$\varphi = arg(K) = 0$$

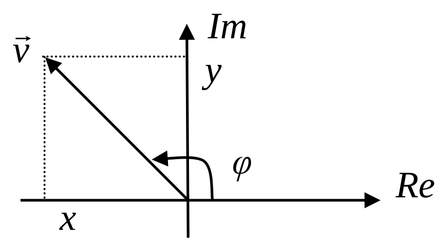
6) La fase dei numeri reali negativi -K<0 è pari a - π:



$$\varphi = arg(-K) = -\pi$$

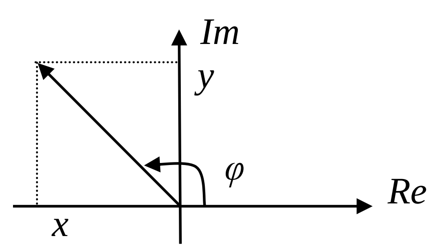
7) La fase φ di un vettore $\vec{v}$ del piano è definita a meno di un multiplo intero di 2 π:

$$arg(\vec{v}) = \varphi + 2K\pi, \quad \forall K \in \mathbf{Z}$$



Pertanto, si può considerare la fase φ definita nell'intervallo $[0, 2\pi]$ oppure nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Generalmente nei controlli automatici si utilizza la seconda opzione.

8) Per calcolare la fase φ di un vettore $\vec{v} = x + j\ y$ del piano con parte reale negativa x<0 occorre utilizzare la formula:

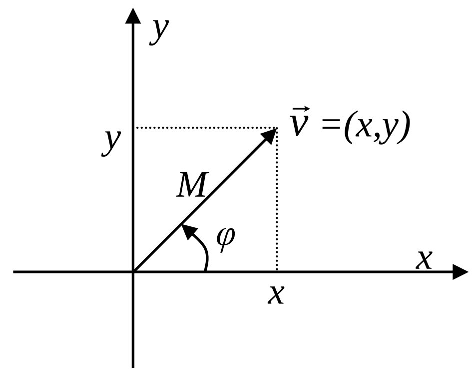


$$\varphi = arg(\vec{v}) = \pm\pi + \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$$

dove si considera il termine + π.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

10) È sempre possibile passare da una rappresentazione cartesiana *(x , y)* ad una rappresentazione polare e viceversa del numero complesso utilizzando le seguenti relazioni:



$$\begin{cases} M = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arctg\,\dfrac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = M\,cos\,\varphi \\ y = M\,sin\,\varphi \end{cases}.$$

11) Il modulo del prodotto di numeri complessi è pari al prodotto dei moduli. Ad esempio si ha:

$$\frac{(1+3j)}{(2-5j)(-4+j)} = \frac{(1+3j)(2+5j)(-4-j)}{(2-5j)(2+5j)(-4+j)(-4-j)} = \frac{(1+3j)(-3-22j)}{(4+25)(16+1)} = \frac{63-31j}{493} = \frac{63}{493} - \frac{31}{493}j$$

da cui

$$\left|\frac{(1+3j)}{(2-5j)(-4+j)}\right| = \left|\frac{63}{493} - \frac{31}{493}j\right| = \sqrt{\frac{63^2}{493^2} + \frac{31^2}{493^2}} \approx 0.14$$

Si ha ugualmente:

$$\left|\frac{(1+3j)}{(2-5j)(-4+j)}\right| = \frac{|1+3j|}{|2-5j||-4+j|} = \frac{\sqrt{1^2+3^2}}{\sqrt{2^2+5^2}\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{29}\sqrt{17}} \approx 0.14$$

12) La fase del prodotto di numeri complessi è uguale alla somma delle fasi. Ad esempio per il numero complesso visto in precedenza si ha:

$$\frac{(1+3j)}{(2-5j)(-4+j)} = \frac{63}{493} - \frac{31}{493}j$$

da cui

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$\angle\frac{(1+3\mathrm{j})}{(2-5\mathrm{j})(-4+\mathrm{j})}=\angle\left(\frac{63}{493}-\frac{31}{493}\mathrm{j}\right)=\mathrm{arctg}\left(-\frac{31}{63}\right)\approx-0.46\ \text{rad (-26.2°)}.$$

Si ha ugualmente:

$$\angle\left(\frac{(1+3\mathrm{j})}{(2-5\mathrm{j})(-4+\mathrm{j})}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{3}{1}\right)-\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{-5}{2}\right)+\pi+\mathrm{arctg}\left(\frac{-1}{4}\right)\right)\approx-0.46\ \text{rad. (-26.2°)}.$$

Approfondimenti consigliati:
Capitolo 1 ed esercizi del testo G. Marro, Controlli Automatici, Zanichelli, 2004.
Appendice B del testo A. V. Papadopoulos, M. Prandini, Fondamenti di Automatica. Esercizi, Pearson, 2016.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.