LA TRASFORMATA DI LAPLACE

Per descrivere l'evoluzione di un sistema in regime transitorio, ossia durante il passaggio delle uscite da un regime stazionario ad un altro, è necessario ricorrere ad un modello più generale rispetto al modello statico, detto *modello matematico dinamico.* Tale modello è costituito da una o più equazioni differenziali che legano non solo le variabili incognite di uscita (effetti) con quelle note di ingresso (cause), ma anche le loro derivate rispetto al tempo. Ad esempio un sistema SISO lineare tempoinvariante con ingresso x e uscita y può essere descritto nella forma:

$$\begin{aligned} &a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ &= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned}$$

o, con notazione più compatta

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i x(t) \,.$$

È quindi indispensabile conoscere le proprietà ed i procedimenti di soluzione delle equazioni differenziali (lineari a coefficienti costanti) al fine di determinare l'uscita *y(t)* di un sistema dinamico in risposta ad un dato segnale di ingresso *x(t).*

Oltre ai metodi classici derivati dall'analisi matematica, per risolvere una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, quale quella descritta precedentemente, si può utilizzare l'operatore di *trasformazione secondo Laplace*.

Si tratta di un procedimento che presenta numerosi vantaggi rispetto alle tecniche classiche dell'analisi. In particolare, esso trasforma equazioni integro-differenziali in equazioni algebriche, di più semplice risoluzione.

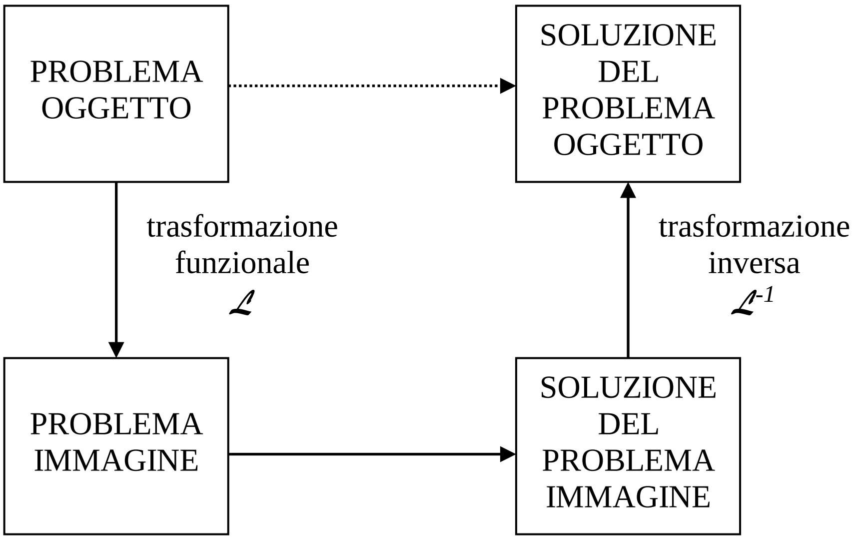
La trasformata di Laplace è una *trasformazione funzionale*. Tale trasformazione stabilisce una corrispondenza biunivoca tra funzioni oggetto (funzioni del tempo) e funzioni immagine:

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$f(t): [0,+\infty[\rightarrow \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad F(s): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

sì da associare a funzioni del tempo *f(t)*, in generale a valori complessi, funzioni complesse *F(s)* della variabile complessa *s*.

In tal modo ad un problema "oggetto" definito nel dominio del tempo, spesso di difficile soluzione, viene associato un problema "immagine", definito nel dominio della variabile complessa s, più semplice da risolvere. Dalla soluzione immagine si può quindi ricavare la soluzione oggetto con l'operazione di *antitrasformazione* o *trasformazione inversa*.



Si consideri ora la generica funzione *f(t)*:

- definita per $t \in [0,+\infty[$
- generalmente continua in $[0,+\infty[$
- assolutamente integrabile in ogni intervallo [0,T]:

$$\exists \int_0^T |f(t)|dt < +\infty \quad \forall T > 0$$

Sia inoltre $s = \sigma + j\omega$ una variabile complessa e si consideri il seguente integrale di Laplace:

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{T \to +\infty} \int_0^{T} e^{-st} f(t)dt$$

Questo integrale può convergere o divergere.

Possono verificarsi i seguenti casi:

a. l'integrale converge $\forall s \in \mathbb{C}$
b. l'integrale converge $\forall s \in A$, con $A \subset \mathbb{C}$
c. l'integrale non converge in alcun punto $s \in \mathbb{C}$

Nei primi due casi possiamo definire una nuova funzione

$$F: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

che $\forall s \in A$ è definita come:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \in \mathbb{C}$$

La funzione F si dice *trasformata di Laplace* della funzione *f(t)*. Tale trasformata si indica anche con:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'ESISTENZA DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

Le condizioni sufficienti per l'esistenza della trasformata di Laplace *F(s)* sono elencate di seguito e sono soddisfatte da quasi tutte le funzioni *f(t)* che vengono analizzate nella pratica nei controlli automatici.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

I. Funzione "causale":

$$f(t) = \begin{cases} \text{qualsiasi} & \text{per } 0 \leq t < +\infty \\ 0 & \text{per } t<0 \end{cases}$$

Tale condizione è necessaria per la biunivocità della trasformazione, cioè perché si possa ricavare f(t) con l'operazione inversa:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Essa può essere facilmente ottenuta con un'opportuna scelta dell'origine dell'asse dei tempi, ossia effettuando eventualmente una traslazione dell'asse verticale.

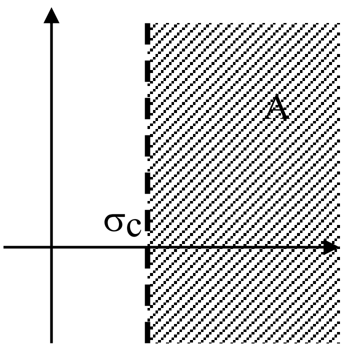
II. Funzione continua a tratti:
$\forall[0,T]$ f(t) ha un numero finito di discontinuità

III. Funzione limitata al finito:
$\exists M \in R^+$ tale che $\forall\ t_0 \in R^+$: $|f(t)| < M$ con $0 \leq t \leq t_0$

IV. Funzione di ordine esponenziale all'infinito:
$\exists M \in r^+$ $\exists\ \sigma \in R$ $\exists\ t_0 \in R^+$ tale che $|f(t)| < M \cdot e^{-\sigma t}$ con $t \geq t_0$ e t_0 finito

TEOREMA DEL DOMINIO DI CONVERGENZA

Si è visto che l'integrale di Laplace ha un dominio di convergenza *A*, in cui esso converge e in cui la trasformata di Laplace è quindi definita. Si può dimostrare che la trasformata di Laplace *F(s)* esiste per tutti i valori di *s* tali che:



$$\text{Re}\{s\} > \sigma_c,$$

ovvero il dominio di convergenza A è dato da un semipiano che coincide con la parte del piano complesso posta alla destra della retta verticale individuata da σ_c, detta

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

ascissa di convergenza. Evidentemente nel caso particolare $\sigma_C=-\infty$ si ha $A \equiv \mathbb{C}$ e la trasformata di Laplace F(s) è definita in tutto il piano complesso (caso a di pagina 3), mentre per $\sigma_C=+\infty$ si ha $A \equiv \varnothing$ e la trasformata di Laplace F(s) non è definita (caso c di pagina 3).

Nel seguito ignoriamo il problema dell'individuazione dell'ascissa di convergenza degli integrali di Laplace considerati, dando per scontato che essi vengono analizzati sempre all'interno del rispettivo dominio di definizione.

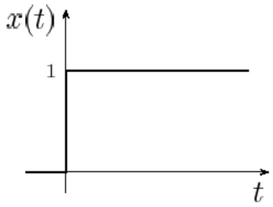
SEGNALI CANONICI

Tipicamente nei controlli automatici per testare un sistema dinamico si utilizzano dei segnali detti canonici o di saggio, utilizzati come funzioni elementari in combinazione delle quali è scomposto il generico ingresso. Infatti, assumendo che il sistema sia lineare, il principio di sovrapposizione degli effetti permette di studiare separatamente l'effetto di tali segnali. Inoltre l'ipotesi di linearità assicura che l'uscita del sistema si componga unicamente dei modi elementari e dei modi dell'ingresso, come si vedrà nell'analisi di stabilità dei sistemi lineari stazionari, pertanto le caratteristiche dinamiche dell'uscita di un sistema sono analoghe in corrispondenza di diversi ingressi, a meno dei modi introdotti da questi ultimi.

I segnali canonici sono elencati di seguito.

1) Il più comune segnale canonico è il gradino o scalino unitario, che modella la brusca variazione di un segnale, dovuta ad esempio alla chiusura di un interruttore o all'accensione di un motore elettrico. Esso è dunque un segnale discontinuo.

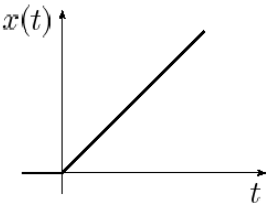
$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ 1 & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases}$$



Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

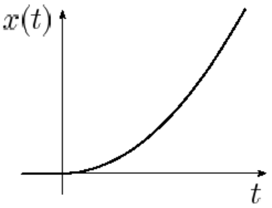
2) Un ulteriore segnale canonico piuttosto comune è la funzione rampa unitaria, che modella l'aumento costante di un segnale. Un esempio tipico si ha negli altoforni per la lavorazione dei metalli, in cui la temperatura aumenta in modo simile all'andamento di una rampa.

$$r(t)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad t<0\\ t & \text{se} \quad t\geq 0\end{cases}$$



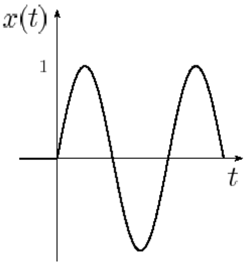
3) Un altro segnale di saggio è la funzione rampa parabolica unitaria, che modella l'aumento continuo di un segnale.

$$p(t)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad t<0\\ \dfrac{t^2}{2} & \text{se} \quad t\geq 0\end{cases}$$



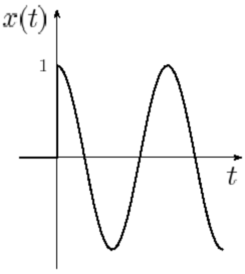
4) Un ulteriore segnale di saggio è la funzione sinusoidale, che modella l'oscillazione continua di un segnale ed è comunemente usata per testare la risposta di reti elettriche e sistemi di controllo audio e video.

$$x(t)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad t<0\\ \sin\omega t & \text{se} \quad t\geq 0\end{cases}=\sin\omega t\cdot 1(t).$$



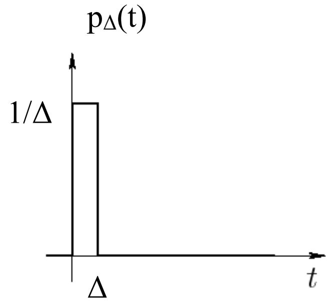
5) Di analogo uso è la funzione cosinusoidale.

$$x(t)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad t<0\\ \cos\omega t & \text{se} \quad t\geq 0\end{cases}=\cos\omega t\cdot 1(t).$$



Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

6) Importante è poi la funzione impulso di ampiezza finita $p_{\Delta}(t)$, data dalla combinazione di due gradini, che sottende un'area unitaria.

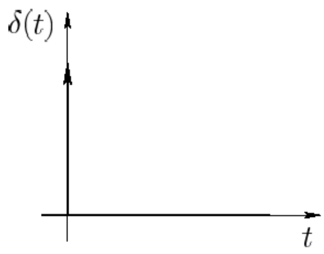


$$p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0; t > \Delta \\ \dfrac{1}{\Delta} & \text{se} \quad 0 \le t \le \Delta \end{cases}$$

Si osserva che qualsiasi sia la durata Δ della funzione impulso di ampiezza finita essa ha sempre area unitaria, ossia vale la relazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\Delta}(t)dt = 1.$$

7) Il segnale impulso di Dirac è un segnale ideale che approssima un impulso di area unitaria e si estingue in un tempo infinitesimo. Esso modella fenomeni istantanei come fulmini o urti improvvisi.



$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} p_{\Delta}(t)$$

Valgono le seguenti proprietà, alcune delle quali sono intuitive:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t)dt = f(0)$
3. $\delta(t) = \dfrac{d1(t)}{dt}$;   3'. $1(t) = \int_{0}^{t} \delta(\tau)d\tau$
4. $1(t) = \dfrac{dr(t)}{dt}$;   4'. $r(t) = \int_{0}^{t} 1(\tau)d\tau$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

5. $r(t) = \dfrac{dp(t)}{dt}$; 5'. $p(t) = \int_0^t r(\tau)d\tau$

6. $$\int_\alpha^\beta f(t)\,\delta(t-a)\,dt = \begin{cases} f(a) & \text{se } a \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{se } a \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

In particolare, osservando la proprietà 3, è evidente che in essa l'operatore di derivata indica la derivata generalizzata, poiché l'impulso di Dirac è discontinuo tra 0^- e 0^+ e in 0 esso assume valore infinito. Quindi l'impulso di Dirac è in realtà una distribuzione, non una funzione vera e propria.

TRASFORMATE NOTEVOLI

Riportiamo di seguito le trasformate di funzioni notevoli. Esse si possono ricavare applicando la definizione di integrale di Laplace, come è indicato nel caso del gradino unitario.

a) Trasformata della funzione gradino unitario

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s}$$

Infatti dalla definizione di trasformata si ha:

$$F(s) = 1(s) = \int_0^{+\infty} 1(t)\ e^{-st}\ dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T 1\ e^{-st}\ dt =$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \left[-\frac{1}{s}\ e^{-st} \right]_0^T = \lim_{T\to+\infty} \left[-\frac{1}{s}\left(e^{-sT} - 1\right) \right] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{T\to+\infty} e^{-sT}$$

e poiché

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$\lim_{T\to+\infty} e^{-sT} = 0 \qquad \text{se } \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

risulta:

$$F(s) = \frac{1}{s} \qquad \text{con } \sigma_C = 0$$

b) Trasformata dell'impulso di Dirac

$$f(t) = \delta(t) \qquad \rightarrow \qquad F(s) = 1$$

Infatti dalla definizione di trasformata e applicando la proprietà 2 di pagina 6 si ha:

$$F(s) = \Delta(s) = \int_0^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = \left[e^{-st} \right]_{t=0} = 1$$

c) Trasformata della funzione rampa unitaria

$$f(t) = r(t) = t\, 1(t) \qquad \rightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s^2}$$

d) Trasformata della funzione rampa parabolica

$$f(t) = p(t) = 1/2\, t^2\, 1(t) \qquad \rightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s^3}$$

e) Trasformata della funzione esponenziale ($a \in \mathbb{C}$)

$$f(t) = e^{-at}\, 1(t) \qquad \rightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s+a}$$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Infatti dalla definizione di trasformata si ha:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot 1(t)\, e^{-st}\, dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-(s+a)t}\, dt = \lim_{T\to+\infty} \left[-\frac{1}{s+a}\, e^{-(s+a)t} \right]_0^T =$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \left[-\frac{1}{s+a}\left(e^{-(s+a)T} - 1\right) \right] = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+a} \lim_{T\to+\infty} e^{-(s+a)T}$$

e poiché

$$\lim_{T\to+\infty} e^{-(s+a)T} = 0 \qquad \text{se } \mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$$

risulta:

$$F(s) = \frac{1}{s+a} \qquad \text{con } \sigma_c = -\mathrm{Re}\{a\}$$

f) Trasformata delle funzioni sinusoidali

$$f(t) = [\mathrm{sen}\,(\omega t)]\ 1(t) \quad \rightarrow \quad F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = [\cos\,(\omega t)]\ 1(t) \quad \rightarrow \quad F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Per la trasformazione si sfruttano le formule di Eulero, rappresentando le funzioni sinusoidali come somme di esponenziali complessi. Infatti per le formule di Eulero si ha:

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}, \quad \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

quindi

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L’autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l’autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}=\frac{1}{2j}\ \mathcal{L}\{e^{j\omega t}\}-\frac{1}{2j}\ \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}=\frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{s+j\omega}=$$
$$=\frac{1}{2j}\cdot\frac{s+j\omega-s+j\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{1}{2j}\cdot\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Analogamente si ha:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}=\frac{1}{2}\ \mathcal{L}\{e^{j\omega t}\}+\frac{1}{2}\ \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+j\omega}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{s+j\omega+s-j\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2+\omega^2}=\frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

PROPRIETÀ E REGOLE DI TRASFORMAZIONE

a) Vale la seguente relazione:

$$F(s^*) = F^*(s)$$

dove il simbolo * indica l'operazione di coniugazione di numeri complessi: si ricordi che F(s) è una funzione a valori complessi.

b) Proprietà di *linearità*

La combinazione lineare tramite i coefficienti complessi *a* e *b* di due funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$, aventi trasformate $F_1(s)$ ed $F_2(s)$, ha come trasformata la stessa combinazione lineare delle funzioni $F_1(s)$ ed $F_2(s)$:

$$f(t) = a\, f_1(t) + b\, f_2(t) \quad \rightarrow F(s) = a\, F_1(s) + b\, F_2(s)$$

Infatti l’integrale è un operatore lineare.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L’autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l’autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

c) Teorema della *traslazione nel tempo*

Data una funzione f(t) con trasformata F(s), la funzione f(t) ritardata nel tempo di τ secondi ha la seguente trasformata:

$$g(t) = f(t-\tau) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = e^{-\tau s} F(s)$$

quindi l'operatore $e^{-\tau s}$ modella un ritardo puro nel dominio della frequenza complessa s.

d) Teorema della *traslazione complessa*

Data una funzione f(t) con trasformata F(s) e considerato $a \in \mathbb{C}$, si ha:

$$g(t) = e^{-at} f(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = F(s+a)$$

Si noti che la trasformata notevole della funzione esponenziale vista nel paragrafo precedente è un caso particolare di questo teorema, quando si considera f(t)=1(t).

Altri casi particolari sono i seguenti:

$$g(t) = (e^{-at}) \operatorname{sen}(\omega t) \qquad \rightarrow G(s) = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

$$g(t) = (e^{-at}) \cos(\omega t) \qquad \rightarrow G(s) = \frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

e) Teorema del *cambiamento di scala*

Data una funzione f(t) con trasformata F(s), la funzione da essa ottenuta cambiando la scala dei tempi di una quantità $a \in \mathbb{C}$ ha la seguente trasformata:

$$g(t) = f(t/a) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = a\, F(a \cdot s)$$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

f) Teorema della *moltiplicazione per t^n*

$$g(t) = t\, f(t) \quad \to \quad G(s) = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$\dots$$

$$g(t) = t^n f(t) \quad \to \quad G(s) = (-1)^n \cdot \frac{d^{(n)}[F(s)]}{ds^n}$$

Casi particolari:

I)Trasformata della potenza: $g(t) = t^n\, 1(t) \quad \to \quad G(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

Per esempio:

rampa $g(t) = t\, 1(t) = r(t) \quad \to \quad G(s) = \frac{1}{s^2}$

parabola $g(t) = t^2\, 1(t) = 2\, p(t) \quad \to \quad G(s) = \frac{2}{s^3}$

II) $g(t) = t^n (e^{-at}) \quad \to \quad G(s) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

g) Teorema della *trasformata della derivata*

Sia f(t) una funzione definita e derivabile per t≥0; se esiste la trasformata F(s) di f(t), allora esiste la trasformata della sua derivata prima, che vale:

$$\mathcal{L}\{f^{(1)}(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Generalizzando per le derivate successive, con un procedimento di iterazione si ottiene:

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$\mathcal{L}\{f^{(2)}(t)\} = s^2 F(s) - s f(0) - f^{(1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(3)}(t)\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f^{(1)}(0) - f^{(2)}(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - ....- s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Per esempio:

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} \qquad \rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t)\} = s \cdot \frac{1}{s} - 0 = 1.$$

Si nota che la condizione iniziale si calcola sempre come $f(0^-)$, anche se la f(t) è discontinua in 0, come nel caso del gradino. Infatti le condizioni iniziali sono considerate sempre prima dell'applicazione dell'ingresso.

h) Teorema della *trasformata dell'integrale*

Se f(t) ha trasformata F(s), allora vale la regola:

$$i(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau \qquad \rightarrow \qquad I(s) = \frac{F(s)}{s}$$

Per esempio:

$$r(t) = \int_0^t 1(\tau) d\tau \qquad \rightarrow \mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2};$$

$$p(t) = \int_0^t r(\tau) d\tau \qquad \rightarrow \mathcal{L}\{p(t)\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^3}.$$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

i) Teorema della *funzione periodica*

Sia f(t) una funzione periodica di periodo T a valori in $\mathbb{C}$. Si consideri la funzione $f_T(t)$, ottenuta restringendo il dominio di definizione di f(t) all'intervallo [0,T]:

$$f_T(t): [0,T] \rightarrow \mathbb{C}$$

Pertanto vale la seguente espressione:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_T(t-kT) = f_T(t) + f_T(t-T) + f_T(t-2T) + \ldots$$

Si ipotizzi che $f_T(t)$ sia trasformabile con trasformata $F_T(s)$. Allora si ha:

$$f(t) \quad \rightarrow \qquad F(s) = F_T(s) \cdot (1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \ldots) = F_T(s) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-Ts})^n = \frac{F_T(s)}{1-e^{-Ts}}$$

dove si è applicata la nota regola delle serie secondo cui

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x)^n = \frac{1}{1-x}.$$

l) *Prodotto di convoluzione*

Date due funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$, il prodotto di convoluzione tra loro è definito come segue, dove il simbolo $*$ indica il prodotto di convoluzione:

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{+\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$$

Se $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ hanno trasformate $F_1(s)$ ed $F_2(s)$, vale la seguente regola:

$$f(t) \rightarrow F(s) = F_1(s)\, F_2(s)$$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

IMPULSI DI ORDINE SUPERIORE

Analogamente all'impulso di Dirac, si possono definire impulsi di ordine superiore, dove δ(t) è l'impulso di ordine uno. In generale, l'impulso di ordine n-esimo vale:

$$\delta_n(t) = \frac{d\,\delta_{n\text{-}1}(t)}{dt} = \frac{d^{n-1}\,\delta_1(t)}{dt^{n-1}} = \frac{d^{n-1}\,\delta(t)}{dt^{n-1}} = \frac{d^n\,1(t)}{dt^n}$$

e ha trasformata (che si ottiene facilmente applicando la proprietà di trasformazione della derivata di una funzione riportata a pagina 12):

$$\mathcal{L}\{\delta_n(t)\} = \Delta_n(s) = s^{n-1}$$

Grazie agli impulsi è quindi possibile antitrasformare i polinomi in s.

TEOREMI DEL VALORE FINALE E DEL VALORE INIZIALE

I. Teorema del valore finale

Se f(t) è trasformabile secondo Laplace con trasformata F(s) ed è derivabile, e se esiste il limite per $t \to +\infty$ di f(t), allora vale la seguente relazione:

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s).$$

II. Teorema del valore iniziale

Nell'ipotesi che esistano i seguenti limiti:

$$\lim_{t \to 0} f(t) \qquad \lim_{s \to \infty} s\,F(s)$$

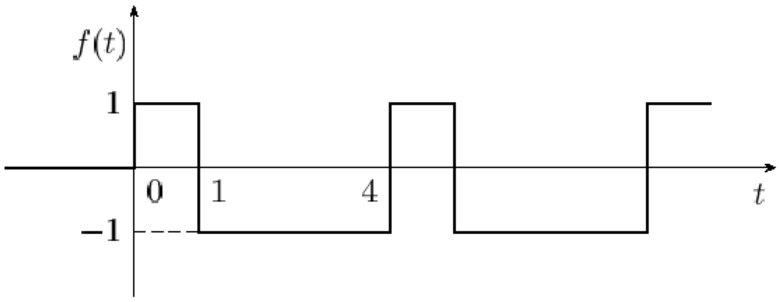
allora vale la seguente relazione:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s\,F(s)$$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

ESEMPI

Calcolare la trasformata di Laplace del seguente segnale:



La funzione f(t) è periodica di periodo T=4. Quindi

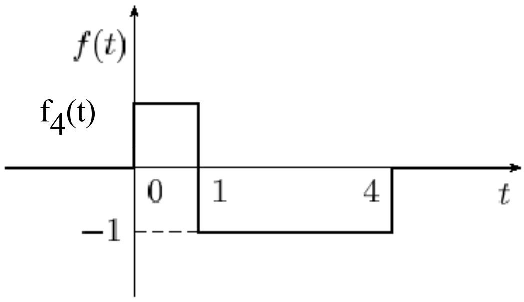
$$F(s) = \frac{F_T(s)}{1-e^{-Ts}} = \frac{F_4(s)}{1-e^{-4s}}$$

dove

$f_4(t)$: $[0,T] \rightarrow R$

è la funzione seguente:

$f_4(t)=1(t)-2\cdot 1(t-1)+1(t-4)$



con

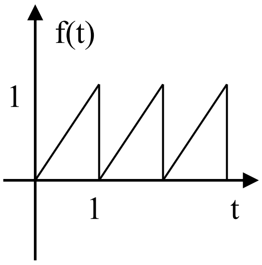
$$F_4(s)=\frac{1}{s}-2\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{s}e^{-4s}=\frac{1-2e^{-s}+e^{-4s}}{s}$$

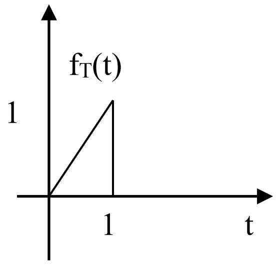
da cui

$$F(s)=\frac{F_4(s)}{1-e^{-4s}}=\frac{1-2e^{-s}+e^{-4s}}{s(1-e^{-4s})}$$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Calcolare la trasformata di Laplace del seguente segnale a dente di sega:





La funzione f(t) è periodica di periodo T=1. Quindi

$$F(s) = \frac{F_T(s)}{1-e^{-Ts}} = \frac{F_1(s)}{1-e^{-s}}$$

dove

$$f_1(t): [0,T] \to \mathrm{R}$$

è la funzione seguente:

$$f_1(t)=r(t)-r(t-1)-1(t-1)$$

con

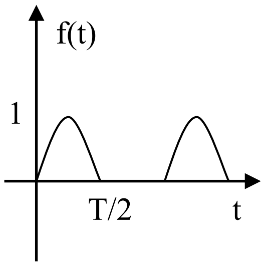
$$F_1(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-s}=\frac{1-e^{-s}-se^{-s}}{s^2}$$

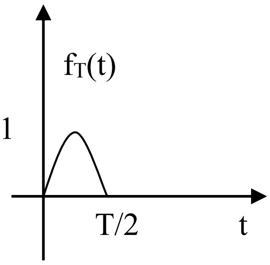
da cui

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{1-e^{-s}}=\frac{1-e^{-s}-se^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}$$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Calcolare la trasformata di Laplace del seguente segnale ottenuto da un raddrizzatore a singola semionda:





La funzione f(t) è periodica di periodo T. Quindi

$$F(s)=\frac{F_T(s)}{1-e^{-Ts}}$$

dove

$$f_T(t)\colon [0,T] \to R$$

è la funzione seguente:

$$f_T(t)=\sin\omega t\cdot 1(t)+\sin\omega\,(t-T/2)\cdot 1(t-T/2),\ \text{con}\ \omega=\frac{2\pi}{T}$$

e

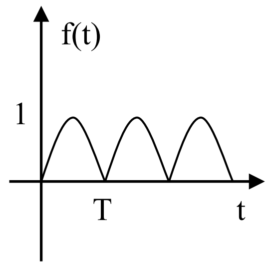
$$F_T(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}+\frac{\omega}{s^2+\omega^2}e^{-\frac{Ts}{2}}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}(1+e^{-\frac{Ts}{2}})$$

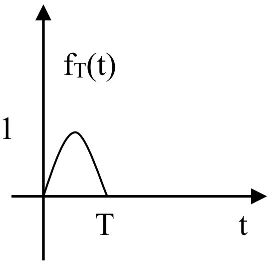
da cui

$$F(s)=\frac{F_T(s)}{1-e^{-Ts}}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1+e^{-\frac{Ts}{2}}}{1-e^{-Ts}}$$

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Calcolare la trasformata di Laplace del seguente segnale ottenuto da un raddrizzatore a doppia semionda:





La funzione f(t) è periodica di periodo T. Quindi

$$F(s)=\frac{F_T(s)}{1-e^{-Ts}}$$

dove

$$f_T(t):\ [0,T] \to R$$

è la funzione seguente:

$$f_T(t)=\sin\omega' t\cdot 1(t)+\sin\omega'(t-T)\cdot 1(t-T),\ \text{con}\ \omega'=\frac{2\pi}{2T}=\frac{\pi}{T}$$

e

$$F_T(s)=\frac{\omega'}{s^2+\omega'^2}+\frac{\omega'}{s^2+\omega'^2}e^{-Ts}=\frac{\omega'}{s^2+\omega'^2}(1+e^{-Ts})$$

da cui

$$\mathbf{F(s)}=\frac{F_T(s)}{1-e^{-Ts}}=\frac{\omega'}{s^2+\omega'^2}\cdot\frac{1+e^{-Ts}}{1-e^{-Ts}}$$

Approfondimenti consigliati:
Capitolo 2 ed esercizi del testo G. Marro, Controlli Automatici, Zanichelli, 2004.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.