

SISTEMI DINAMICI DEL PRIMO ORDINE

I sistemi dinamici del primo ordine sono sistemi dinamici SISO rappresentati da equazioni differenziali lineari e a coefficienti costanti del primo ordine ($n=1$):

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

dove si è indicato con $x(t)$ il segnale ingresso e con $y(t)$ l'uscita del sistema.

Considerando un ingresso causale e trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale che modella il sistema con condizioni iniziali nulle, si ottiene la relazione tra le trasformate di Laplace dell'uscita forzata e dell'ingresso:

$$(a_1 s + a_0) Y(s) = (b_1 s + b_0) X(s)$$

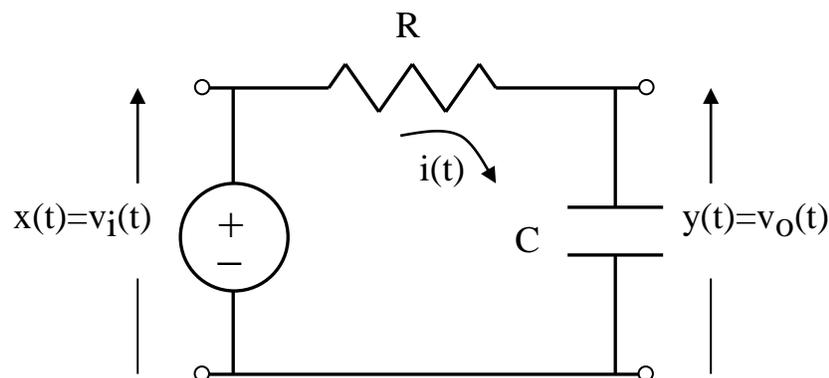
da cui si ottiene la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0}$$

che ha una evidente corrispondenza con il modello nel tempo (ossia l'equazione differenziale) del sistema e poteva da esso essere determinata per ispezione.

ESEMPIO

Il sistema di riferimento del primo ordine è la rete integratrice o circuito RC serie.



Si tratta di una rete elettrica costituita dalla serie di una resistenza R e di un condensatore di capacità C , alimentata da un generatore di tensione $v_i(t)$. L'uscita del quadripolo è la tensione ai capi del condensatore $v_o(t)$: l'obiettivo è dunque studiare l'andamento della tensione ai capi della capacità in risposta all'applicazione di un segnale di ingresso.

Determiniamo la funzione di trasferimento del sistema.

Applichiamo la legge di Kirchoff delle tensioni e le proprietà caratteristiche della resistenza e del condensatore. Si ha:

$$v_i(t) = Ri(t) + v_o(t)$$

da cui

$$v_i(t) = R \cdot C \frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t)$$

o anche, se x è l'ingresso v_i e y l'uscita v_o :

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t).$$

Trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale con condizioni iniziali nulle ($v_o(0)=0$, il condensatore è supposto inizialmente scarico) si ha:

$$V_i(s) = (RCs + 1) \cdot V_o(s)$$

o anche

$$(RCs + 1)Y(s) = X(s)$$

da cui

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + RCs} = \frac{1}{1 + \tau s} = \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}$$

Un metodo alternativo per determinare la funzione di trasferimento del sistema consiste nell'utilizzare la regola del partitore nel dominio della frequenza complessa s , facendo uso delle impedenze:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + RCs}$$

che coincide con il risultato precedentemente determinato.

La funzione di trasferimento del sistema ha $m=0$ zeri e $n=1$ polo, il sistema è del primo ordine (infatti tale è l'ordine dell'equazione differenziale che lo descrive).

La funzione di trasferimento è espressa nella forma in costanti di tempo, con un polo reale negativo

$$p = -\frac{1}{RC}$$

che presenta una costante di tempo positiva misurata in secondi pari a

$$\tau = RC = -\frac{1}{p}$$

Osserviamo che questa rete, anche se è detta integratrice, non è un integratore vero e proprio, infatti l'uscita $v_o(t)$ non è l'integrale dell'ingresso $v_i(t)$ ma è pari all'integrale della corrente $i(t)$ che scorre nella serie. Infatti, per la legge che descrive il condensatore si ha:

$$v_o(t) = \frac{1}{C_0} \int_0^t i(\tau) d\tau.$$

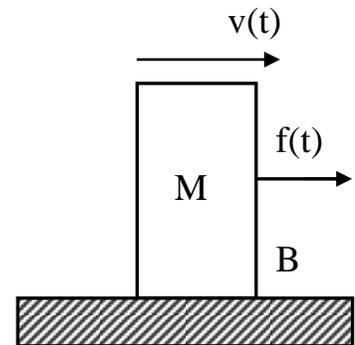
La funzione di trasferimento della rete elettrica può rappresentare anche un sistema differente dal sistema in questione, ma sempre con un modello del tipo:

$$\tau \frac{dy}{dt}(t) + y(t) = x(t)$$

cui corrisponde un polo reale che può essere negativo o eventualmente positivo, a seconda che la costante di tempo relativa τ sia positiva o meno. Indipendentemente dalla natura fisica del sistema modellato, se la sua funzione di trasferimento è la stessa della rete elettrica integratrice esso presenta evidentemente lo stesso comportamento dinamico del circuito elettrico considerato.

Prendiamo ad esempio il sistema meccanico traslatorio in figura, in cui una massa M si muove sottoposta ad una forza orizzontale $f(t)$ con attrito B su un piano. Evidentemente, detta $v(t)$ la velocità orizzontale della massa, si ha:

$$M \frac{dv(t)}{dt} + Bv(t) = f(t)$$



da cui

$$\frac{M}{B} \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = \frac{f(t)}{B}$$

e ponendo $\tau=M/B$, $x(t)=f(t)/B$, $y(t)=v(t)$, si ha ancora il sistema del primo ordine ottenuto analizzando il circuito RC serie con costante di tempo τ positiva:

$$\tau \frac{dy}{dt}(t) + y(t) = x(t).$$

Calcoliamo la risposta all'impulso del sistema di riferimento del primo ordine.

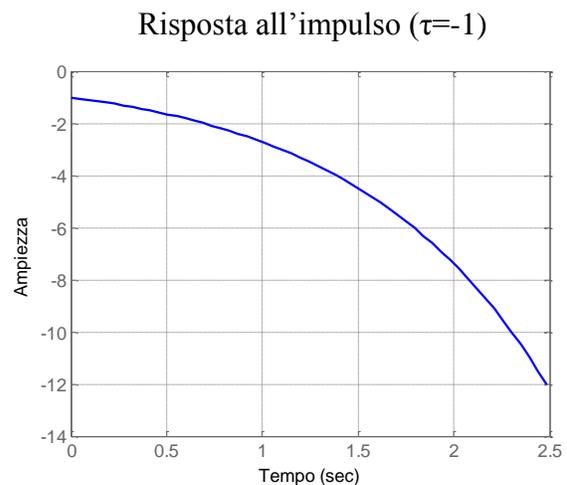
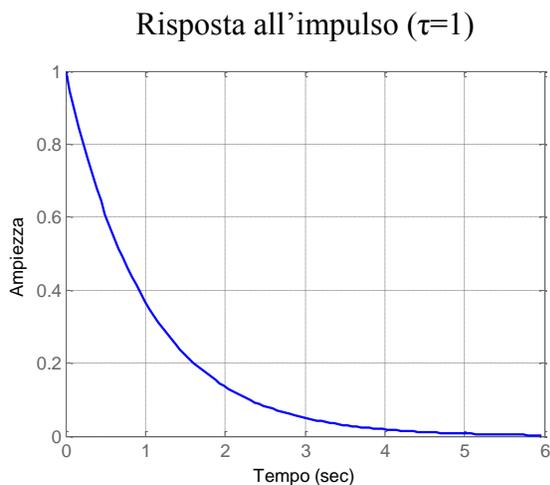
Si ha

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} = \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}$$

quindi la risposta all'impulso vale

$$g(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t)$$

ossia è un esponenziale che converge a zero per $\tau > 0$, che è il caso della rete elettrica e del sistema meccanico. Se invece la funzione di trasferimento descrive un sistema del primo ordine con una costante di tempo $\tau < 0$ la risposta all'impulso diverge. Le rispettive risposte al gradino ottenute nei due casi $\tau = 1$ e $\tau = -1$ sono confrontate nelle figure alla pagina seguente.



Calcoliamo ora la risposta al gradino del sistema.

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(1 + \tau s)} = \frac{\frac{1}{\tau}}{s \left(s + \frac{1}{\tau} \right)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \frac{1}{\tau}}$$

con

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$k_1 = \left. \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right|_{s=0} = 1$$

$$k_2 = -k_1 = -1$$

dove l'ultima condizione deriva dal teorema dei residui. Quindi

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

da cui

$$y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot 1(t).$$

La risposta al gradino diverge se $\tau < 0$, ossia se il polo del sistema è posizionato nel semipiano destro del piano complesso (nel caso di un circuito RC serie o di un sistema meccanico massa-smorzatore o massa-attrito naturalmente si ha $\tau > 0$).

Inoltre, per $\tau > 0$ sono rispettate le ipotesi del teorema del valore finale, la validità del quale è facilmente verificabile.

Rappresentiamo ora l'andamento nel tempo della risposta al gradino del sistema per $\tau > 0$ su una scala dei tempi normalizzata rispetto a τ . L'uscita del sistema converge al valore finale del gradino, ossia raggiunge il regime con un andamento di tipo *aperiodico*.

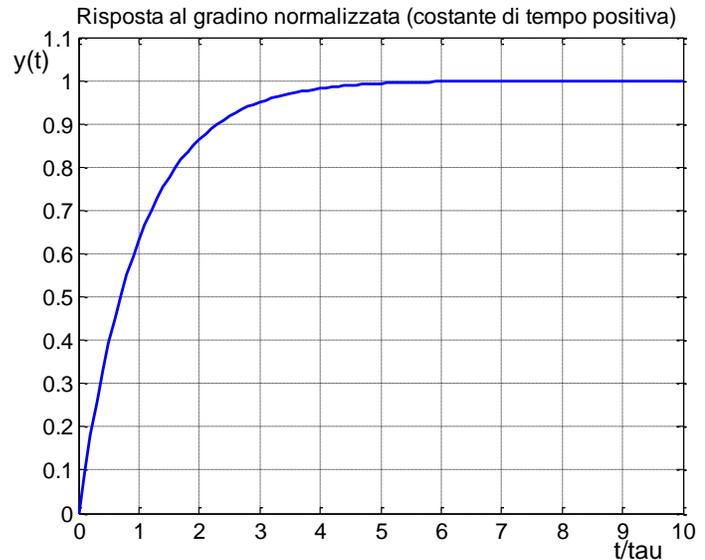
$$t=\tau \rightarrow y(t)=63,2\%$$

$$t=2\tau \rightarrow y(t)=86,5\%$$

$$t=3\tau \rightarrow y(t)=95,0\%$$

$$t=4\tau \rightarrow y(t)=98,2\%$$

$$t=5\tau \rightarrow y(t)=99,3\%$$



Evidentemente la risposta del sistema rappresenta la carica di un condensatore quando si connette l'ingresso del quadripolo ad un generatore di tensione di 1 V. Il condensatore, inizialmente scarico, si carica fino a che, a regime, la tensione ai suoi capi è pari a quella applicata in ingresso e nella resistenza non scorre più corrente.

Dalla risposta al gradino si osserva che dopo una costante di tempo il sistema raggiunge il 63.2% del valore finale, mentre raggiunge il 95% del valore finale dopo circa 3 costanti di tempo.

Dalla risposta indiciale o risposta al gradino del sistema si possono misurare diverse caratteristiche del sistema.

In particolare si definisce tempo di assestamento il tempo che la risposta del sistema impiega per raggiungere il regime (nell'ipotesi che ci sia convergenza).

Evidentemente il regime viene raggiunto solo per $t \rightarrow +\infty$, quindi per motivi pratici il tempo di assestamento viene definito come il tempo che la risposta indiciale impiega per raggiungere il valore finale a meno di un errore del 5% (2% o B%).

Si definisce perciò una banda B di assestamento intorno al valore di regime: il tempo di assestamento al 5% (2% o B%) è dunque il tempo che la risposta impiega per entrare una volta per tutte in una fascia di tolleranza intorno al valore di regime, ossia nella banda di assestamento tra 0.95 e 1.05 (0.98 e 1.08 o $1-B/100$ e $1+B/100$).

Per una generica banda B% si ha infine:

$$t_{sB\%} = -\ln \frac{B}{100} \cdot \tau.$$

Dalle espressioni trovate per il tempo di assestamento si deduce che il sistema è tanto più lento a raggiungere il regime quanto più elevata è la costante di tempo.

Alla stessa conclusione si giunge calcolando la tangente alla risposta indiciale in $t=0^+$:

$$y'(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow y'(0^+) = \frac{1}{\tau}$$

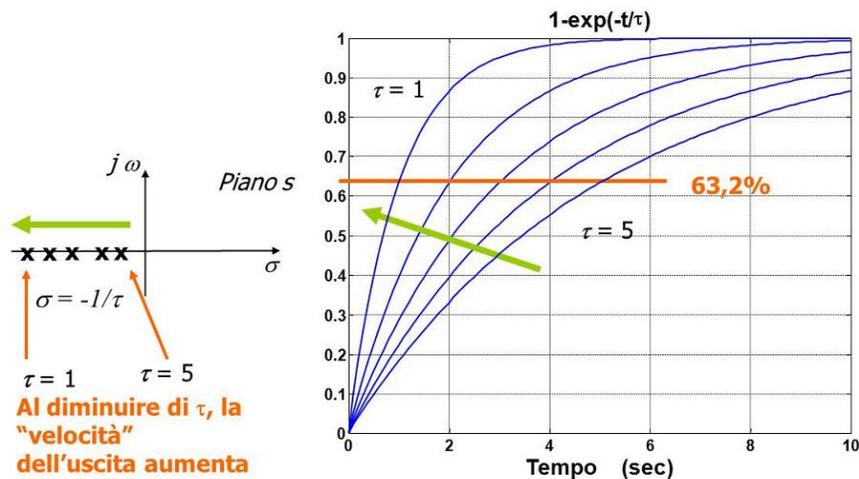
che è la pendenza della retta tangente in 0^+ alla curva. Ne consegue che tale retta vale:

$$y(t) = \frac{t}{\tau}$$

dunque la sua intercetta con l'ingresso $x(t)=1(t)$ si ha per $t=\tau$.

In definitiva, quanto più grande è la costante di tempo, tanto più spostata a destra è l'intercetta e tanto minore è la pendenza della tangente alla curva, quindi tanto più lento è il sistema a raggiungere il regime. La figura successiva riassume il tutto graficamente.

► Risposta del sistema per $\tau = (5,4,3,2,1)$:



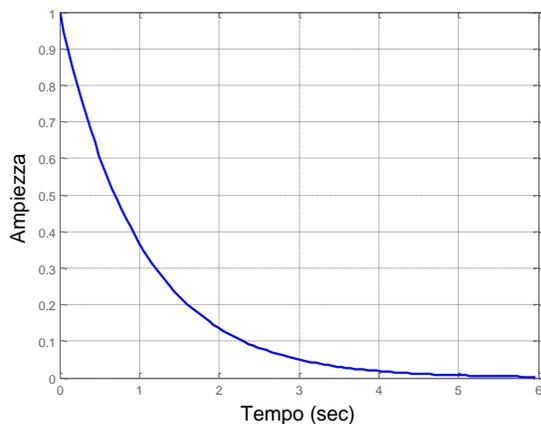
Calcoliamo ora l'errore relativo alla risposta al gradino, che vale:

$$e(t) = x(t) - y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t)$$

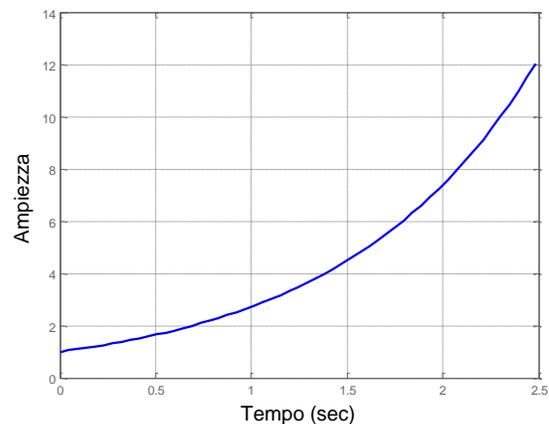
ossia è un esponenziale che converge a zero per $\tau > 0$, che è il caso della rete elettrica e del sistema meccanico. Se invece la funzione di trasferimento descrive un sistema del primo ordine con una costante di tempo $\tau < 0$ l'errore diverge.

Gli andamenti dell'errore ottenuti nei due casi $\tau=1$ e $\tau=-1$ sono confrontati nelle figure precedenti. Nel primo caso si osserva che l'errore decresce sino ad annullarsi in circa 3-4 costanti di tempo. Nel secondo caso esso evidentemente diverge, poiché la risposta al gradino è illimitata.

Errore con ingresso a gradino ($\tau=1$)

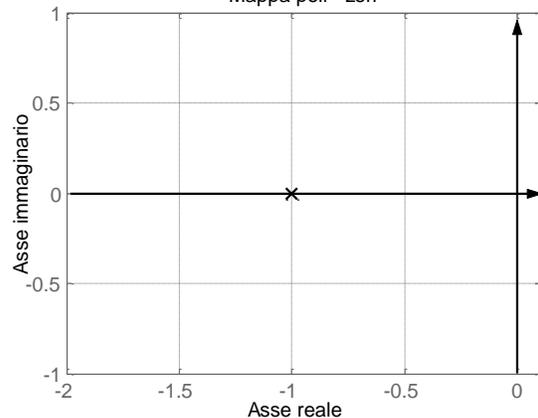


Errore con ingresso a gradino ($\tau=-1$)



Tracciando la mappa poli-zeri ($\tau > 0$) si conclude che la risposta indiciale del sistema elementare del primo ordine è tanto più lenta quanto più vicino è il polo del sistema all'asse immaginario.

Mappa poli - zeri



Si definisce poi il tempo di ritardo t_d , pari al tempo necessario perché la risposta indiciale raggiunga il 50% del valore finale (si veda la figura a pagina 7), ovvero:

$$t_d = t_{50\%} .$$

Si ha:

$$0.5 = 1 - e^{-\frac{t_{50\%}}{\tau}} \Rightarrow t_{50\%} = -\ln 0.5\tau \approx 0.7\tau ,$$

da cui

$$t_d = t_{50\%} \approx 0.7\tau .$$

Infine il tempo di salita t_r indica il tempo necessario a che la risposta indiciale passi dal 10% (5%) al 90% (95%) del valore finale (si veda la figura a pagina 7), ovvero:

$$t_r = t_{90\%} - t_{10\%} \quad (t_r = t_{95\%} - t_{5\%}) .$$

Si ha:

$$0.9 = 1 - e^{-\frac{t_{90\%}}{\tau}} \Rightarrow t_{90\%} = -\ln 0.1\tau \approx 2.3\tau \quad (t_{95\%} = -\ln 0.05\tau \approx 3.0\tau) ,$$

$$0.1 = 1 - e^{-\frac{t_{10\%}}{\tau}} \Rightarrow t_{10\%} = -\ln 0.9\tau \approx 0.1\tau \quad (t_{5\%} = -\ln 0.95\tau \approx 0.1\tau) ,$$

da cui

$$t_r = t_{90\%} - t_{10\%} \approx 2.2\tau \quad (t_r = t_{95\%} - t_{5\%} \approx 2.9\tau) .$$

Si osserva che, mentre il tempo di assestamento indica la rapidità del sistema in riferimento al regime, il tempo di ritardo e di salita indicano la rapidità del sistema in riferimento al transitorio.

In definitiva, le precedenti formule sul tempo di assestamento, il tempo di ritardo e il tempo di salita di un sistema del secondo ordine permettono di tarare la costante di tempo τ o, equivalentemente, l'unico polo $t=-1/\tau$, in modo da conseguire la specifica desiderata (il desiderato tempo di assestamento, di ritardo o di salita).

Calcoliamo ora la risposta alla rampa unitaria del sistema.

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2(1 + \tau s)} = \frac{\frac{1}{\tau}}{s^2 \left(s + \frac{1}{\tau} \right)} = \frac{k_{11}}{s^2} + \frac{k_{12}}{s} + \frac{k_{21}}{s + \frac{1}{\tau}}$$

con

$$k_{11} = \left. \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \right|_{s=0} = 1$$

$$k_{21} = \left. \frac{\frac{1}{\tau}}{s^2} \right|_{s=-\frac{1}{\tau}} = \tau$$

$$k_{12} = -k_{21} = -\tau$$

dove l'ultima relazione deriva dall'applicazione del teorema dei residui. Quindi

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}}$$

da cui

$$y(t) = \left(t - \tau + \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot 1(t).$$

con

$$y(0) = 0, \quad y(+\infty) = +\infty.$$

In particolare si ha un errore

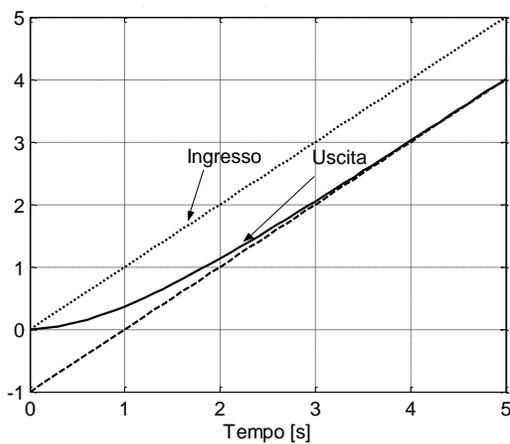
$$e(t) = r(t) - y(t) = \left(\tau - \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot 1(t)$$

con un valore finale non nullo

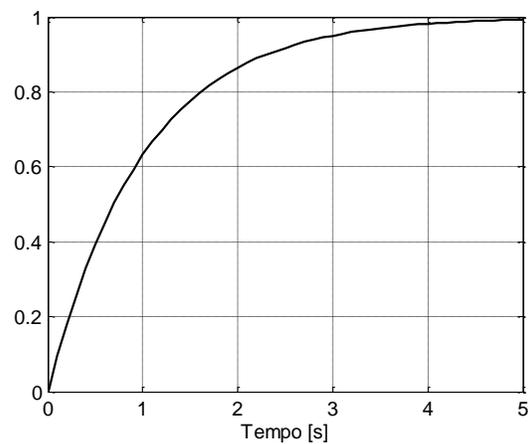
$$e(+\infty) = \tau.$$

Nella figura successiva sono rappresentati degli esempi di risposta alla rampa lineare unitaria e di relativo errore con $\tau=1$.

Risposta alla rampa lineare unitaria ($\tau=1$)



Errore con ingresso a rampa lineare unitaria ($\tau=1$)



ESEMPIO

Si determinino il tempo di ritardo, il tempo di salita e il tempo di assestamento al 5% della risposta al gradino unitario associata al sistema del primo ordine con funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Evidentemente il sistema è espresso nella forma elementare del primo ordine con costante di tempo $\tau=1$, pertanto la sua risposta indiciale (o risposta al gradino unitario) vale

$$y(t) = (1 - e^{-t}) \cdot 1(t).$$

Per determinare il tempo di ritardo t_d è sufficiente calcolare l'istante di tempo per il quale tale risposta raggiunge il 50% del valore finale, ovvero vale 0.5, pertanto si deve risolvere l'equazione

$$1 - e^{-t} = 0.5$$

ovvero

$$e^{-t} = 0.5$$

da cui

$$t_d = -\ln 0.5 \approx 0.7 \text{ s.}$$

Per determinare il tempo di salita t_r è sufficiente calcolare gli istanti di tempo per i quali la risposta indiciale raggiunga il 10% (5%) e il 90% (95%) del valore finale, pertanto si devono risolvere le equazioni

$$1 - e^{-t} = 0.1; 1 - e^{-t} = 0.9$$

ovvero

$$e^{-t} = 0.9; e^{-t} = 0.1$$

da cui

$$t_1 = -\ln 0.9 \approx 0.1 \text{ s}; t_2 = -\ln 0.1 \approx 2.3 \text{ s}$$

e quindi

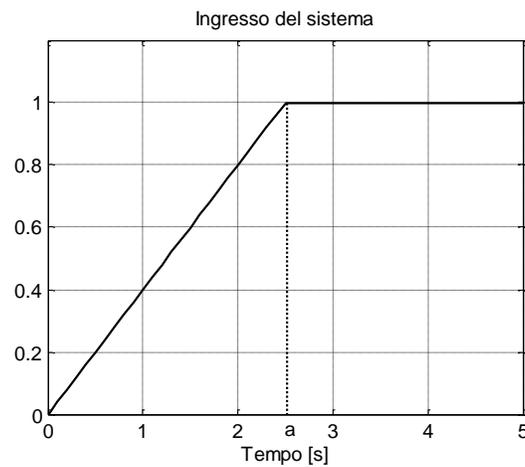
$$t_r = t_2 - t_1 \approx 2.2 \text{ s.}$$

Infine, si ha

$$t_{s5\%} \approx 3\tau = 3 \text{ s.}$$

ESEMPIO

Si calcoli la risposta del sistema elementare del primo ordine al segnale in figura.



Evidentemente si ha

$$x(t) = \frac{1}{a} \cdot r(t) - \frac{1}{a} \cdot r(t - a)$$

quindi

$$X(s) = \frac{1}{as^2} - \frac{1}{as^2} \cdot e^{-as} = \frac{1 - e^{-as}}{as^2}$$

da cui

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{1}{(1 + \tau s)} \cdot \frac{1 - e^{-as}}{as^2}.$$

Antitrasformare questa funzione con il metodo dei fratti semplici non è possibile, poiché essa non è razionale fratta (sarebbe necessario scomporla nella somma algebrica di due funzioni).

Per la linearità del sistema è tuttavia possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, per cui si ha:

$$y(t) = \frac{1}{a} \cdot y_r(t) - \frac{1}{a} \cdot y_r(t - a)$$

dove con $y_r(t)$ si è indicata la risposta alla rampa lineare del sistema.

Ne consegue, utilizzando l'espressione della risposta alla rampa calcolata in precedenza:

$$y(t) = \left(\frac{t - \tau}{a} + \frac{\tau}{a} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot 1(t) - \left(\frac{t - a - \tau}{a} + \frac{\tau}{a} \cdot e^{-\frac{(t-a)}{\tau}} \right) \cdot 1(t - a).$$

Consideriamo ancora la rete RC del primo ordine elementare. Essa può essere modellata diversamente da quanto fatto, se si orienta il sistema con una scelta differente delle variabili di causa ed effetto. Se ad esempio si considerano quale ingresso $x(t)$ ancora la tensione $v_i(t)$ e come uscita la corrente che scorre nella maglia $y(t)=i(t)$ si ha, per la legge di Kirchoff delle tensioni e per le proprietà del condensatore e della resistenza:

$$x(t) = R \cdot y(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

o anche, derivando primo e secondo membro:

$$RC \cdot y'(t) + y(t) = C \cdot x'(t).$$

Trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale con condizioni iniziali nulle si ha in questo caso:

$$(RC \cdot s + 1) \cdot Y(s) = C \cdot s \cdot X(s)$$

da cui

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Cs}{1 + RCs} = \frac{Cs}{1 + \tau s}$$

In alternativa, possiamo determinare la funzione di trasferimento del sistema utilizzando le impedenze associate ai componenti elettrici presenti nel circuito e scrivendo l'espressione della corrente direttamente nel dominio della frequenza complessa s:

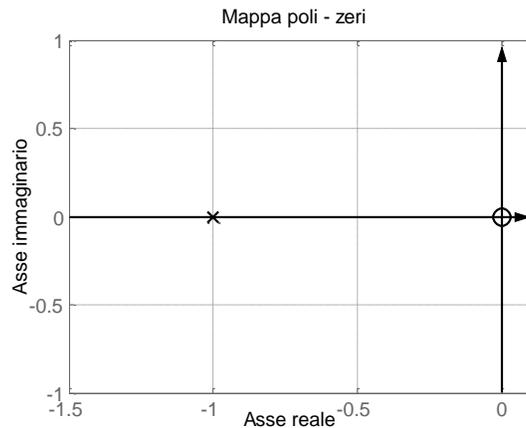
$$Y(s) = \frac{X(s)}{R + \frac{1}{sC}}$$

da cui

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sC}{1 + RCs}$$

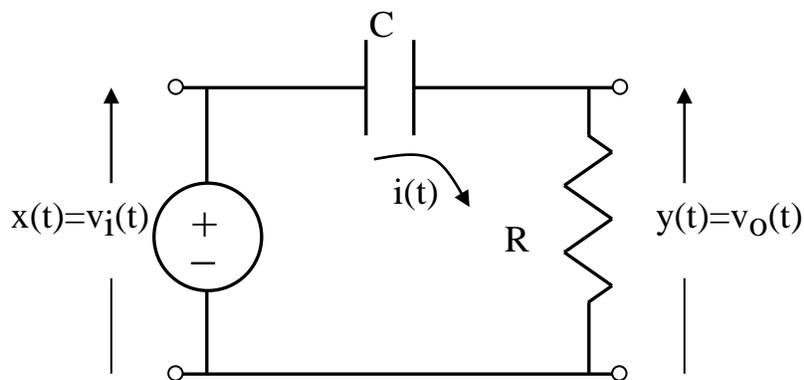
che coincide con il risultato precedentemente determinato. La funzione di trasferimento del sistema è espressa ancora nella forma in costanti di tempo, con m=1 zero nell'origine

($s=0$) e $n=1$ polo reale negativo in $p = -\frac{1}{RC} < 0$, che presenta una costante di tempo positiva misurata in secondi pari a $\tau = RC = -\frac{1}{p} > 0$.



Come nel caso in cui si scelga come uscita la tensione ai capi del condensatore, anche scegliendo come uscita la corrente nella serie il sistema è del primo ordine (infatti tale è ancora l'ordine dell'equazione differenziale che lo descrive). La mappa poli-zero del sistema in questo caso è differente, essendoci uno zero nell'origine. Si conclude che se uno stesso sistema è *orientato* in modo differente, esso è modellato da funzioni di trasferimento diverse.

Un altro sistema del primo ordine comunemente usato nei controlli automatici è la rete derivatrice, rappresentata nella figura successiva.



Come per la rete integratrice, si tratta di una rete elettrica costituita dalla serie di una resistenza R e di un condensatore di capacità C , alimentata da un generatore di tensione $v_i(t)$ che è l'ingresso $x(t)$ del sistema. L'uscita del quadripolo è in questo caso la tensione ai capi della resistenza $y(t)=v_o(t)$: l'obiettivo è studiare l'andamento di tale tensione in risposta all'applicazione di un segnale di tensione in ingresso.

Determiniamo la funzione di trasferimento del sistema.

Applichiamo la legge di Kirchoff delle tensioni e le proprietà caratteristiche della resistenza e del condensatore. Si ha:

$$x(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{y(\tau)}{R} d\tau + y(t)$$

o anche, derivando primo e secondo membro:

$$RC \cdot y'(t) + y(t) = RC \cdot x'(t).$$

Trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale con condizioni iniziali nulle si ha in questo caso:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{RCs}{1 + RCs} = \frac{\tau s}{1 + \tau s}$$

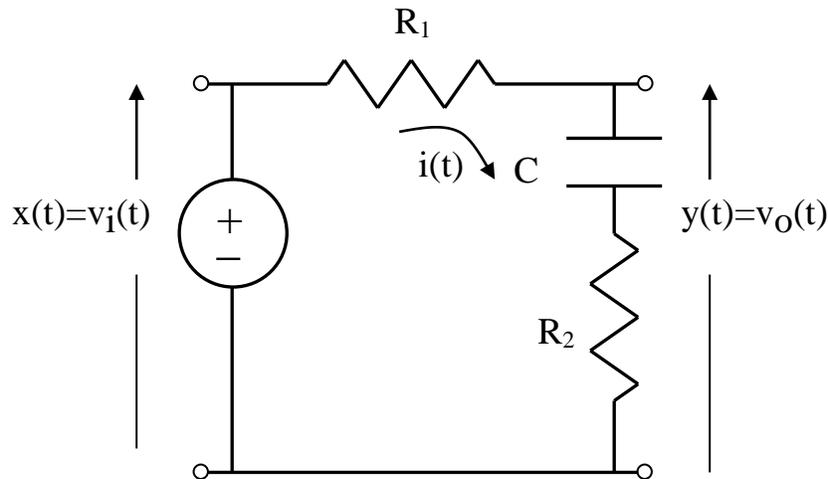
In alternativa, per determinare la funzione di trasferimento del sistema facciamo uso delle impedenze dei componenti elettrici e della regola del partitore:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{RCs}{1 + RCs}$$

che coincide con il risultato precedentemente determinato.

La funzione di trasferimento del sistema è espressa ancora nella forma in costanti di tempo, con $m=1$ zero nell'origine e $n=1$ polo negativo con costante di tempo positiva. La mappa poli-zeri del sistema è ancora quella vista per la rete precedente.

Vediamo ora la funzione di trasferimento della rete ritardatrice.



Applichiamo la legge di Kirchoff delle tensioni e le proprietà caratteristiche delle resistenze e del condensatore. Si ha:

$$v_o(t) = R_2 \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

dove

$$i(t) = \frac{v_i(t) - v_o(t)}{R_1}$$

e sostituendo la seconda espressione nella prima si ha:

$$v_o(t) = R_2 \cdot \frac{v_i(t) - v_o(t)}{R_1} + \frac{1}{R_1 C} \int [v_i(\tau) - v_o(\tau)] d\tau$$

o anche, derivando primo e secondo membro:

$$R_1 C \cdot y'(t) = R_2 C \cdot (x'(t) - y'(t)) + (x(t) - y(t)).$$

ossia

$$(R_1 + R_2)C \cdot y'(t) + y(t) = R_2C \cdot x'(t) + x(t).$$

Trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale con condizioni iniziali nulle si ha in questo caso:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R_2Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2}(R_1 + R_2)Cs}{1 + (R_1 + R_2)Cs} = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}$$

dove si è posto

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1, \quad \tau = (R_1 + R_2)C.$$

In alternativa, per determinare la funzione di trasferimento della rete ritardatrice facciamo uso delle impedenze dei componenti elettrici e della regola del partitore:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}}$$

che dopo pochi passaggi può essere messa nella forma precedentemente determinata.

La funzione di trasferimento del sistema è espressa ancora nella forma in costanti di tempo, con $m=1$ zero reale negativo in

$$z = -\frac{1}{R_2C} = -\frac{1}{\alpha\tau} < 0$$

ed $n=1$ polo reale negativo in

$$p = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} = -\frac{1}{\tau} < 0$$

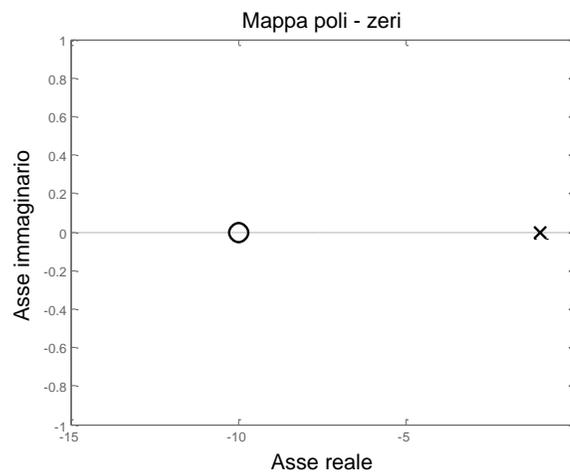
dove $|p| < |z|$ essendo $0 < \alpha < 1$. Inoltre lo zero ha una costante di tempo

$$\tau_z = -\frac{1}{z} = \alpha\tau > 0$$

e il polo ha una costante di tempo

$$\tau_p = -\frac{1}{p} = \tau > 0$$

con $\tau_p > \tau_z$ essendo $0 < \alpha < 1$. La mappa poli-zeri del sistema è rappresentata in figura.



ESEMPIO

Si determinino la risposta all'impulso e la risposta al gradino unitario della rete ritardatrice.

Si ha

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} = \frac{\alpha s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{\alpha s + \frac{\alpha}{\tau} - \frac{\alpha}{\tau} + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} = \alpha + \frac{\frac{1-\alpha}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}$$

da cui

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = \alpha \cdot \delta(t) + \frac{1-\alpha}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t) = \frac{1-\alpha}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t),$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla causalità del sistema e quindi la risposta del sistema ad un generico segnale va considerata a partire dall'istante di tempo $t=0^+$.

Determiniamo ora la risposta al gradino. Si ha

$$Y(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\alpha s + \frac{1}{\tau}}{s \left(s + \frac{1}{\tau} \right)} = \frac{k_{11}}{s} + \frac{k_{21}}{s + \frac{1}{\tau}}$$

con, per la formula sui coefficienti dei fratti semplici:

$$k_{11} = \left. \frac{\alpha s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \right|_{s=0} = 1$$

e, per il teorema dei residui

$$k_{11} + k_{21} = \frac{\alpha}{1} = \alpha \Rightarrow k_{21} = \alpha - k_{11} = \alpha - 1 = -(1 - \alpha).$$

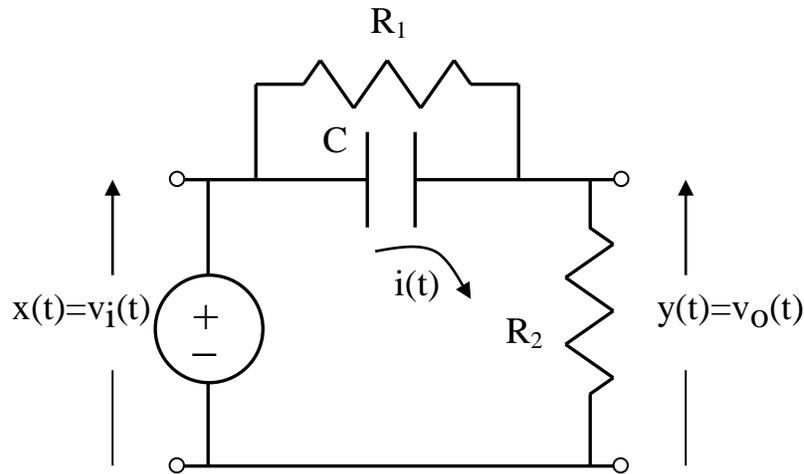
Pertanto

$$Y(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1 - \alpha}{s + \frac{1}{\tau}}$$

da cui

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \left(1 - (1 - \alpha) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot 1(t).$$

Vediamo ora la funzione di trasferimento della rete anticipatrice.



Applichiamo le proprietà caratteristiche delle resistenze e del condensatore e la legge di Kirchoff delle correnti. Si ha:

$$v_o(t) = R_2 \cdot i(t)$$

dove

$$i(t) = \frac{v_i(t) - v_o(t)}{R_1} + C \frac{d(v_i(t) - v_o(t))}{dt}$$

e sostituendo la seconda espressione nella prima si ha:

$$v_o(t) = R_2 \cdot \frac{v_i(t) - v_o(t)}{R_1} + R_2 C \cdot \frac{d(v_i(t) - v_o(t))}{dt}$$

o anche:

$$R_1 R_2 C \cdot y'(t) + (R_1 + R_2) \cdot y(t) = R_1 R_2 C \cdot x'(t) + R_2 \cdot x(t)$$

ossia

$$R_1 C \cdot y'(t) + \frac{(R_1 + R_2)}{R_2} \cdot y(t) = R_1 C \cdot x'(t) + x(t).$$

Trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale con condizioni iniziali nulle si ha in questo caso:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1 + R_1 C s}{\frac{(R_1 + R_2)}{R_2} + R_1 C s} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \cdot \frac{1 + R_1 C s}{1 + \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} R_1 C s} = \alpha \cdot \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

dove si è posto

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1, \quad \tau = R_1 C.$$

In alternativa, per determinare la funzione di trasferimento della rete anticipatrice facciamo uso delle impedenze dei componenti elettrici e della regola del partitore:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R_2}{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + sC} + R_2}$$

che dopo pochi passaggi può essere messa in una forma che coincide con il risultato precedentemente determinato.

La funzione di trasferimento del sistema è espressa ancora nella forma in costanti di tempo, con $m=1$ zero reale negativo in

$$z = -\frac{1}{R_1 C} = -\frac{1}{\tau} < 0$$

ed $n=1$ polo reale negativo in

$$p = -\frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 C} = -\frac{1}{\alpha \tau} < 0$$

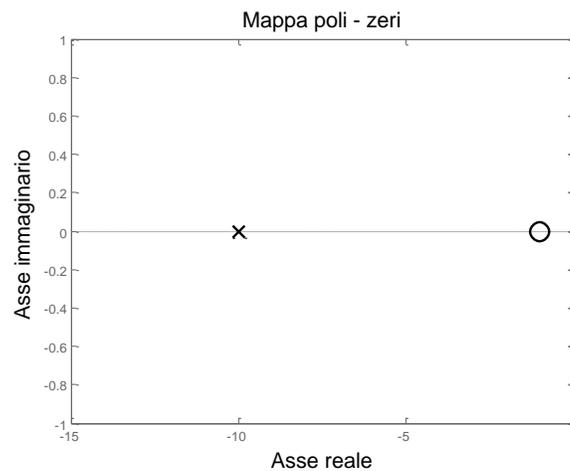
dove $|z| < |p|$ essendo $0 < \alpha < 1$. Inoltre lo zero ha una costante di tempo

$$\tau_z = -\frac{1}{z} = \tau > 0$$

e il polo ha una costante di tempo

$$\tau_p = -\frac{1}{p} = \alpha\tau > 0$$

con $\tau_z > \tau_p$ essendo $0 < \alpha < 1$. La mappa poli-zeri del sistema è rappresentata in figura.



ESEMPIO

Si determinino la risposta all'impulso e la risposta al gradino unitario della rete anticipatrice.

Si ha

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \alpha \cdot \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} = \frac{\alpha + \alpha \tau s}{1 + \alpha \tau s} = \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\alpha \tau}} =$$

$$= \frac{s + \frac{1}{\alpha \tau} - \frac{1}{\alpha \tau} + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\alpha \tau}} = 1 + \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{s + \frac{1}{\alpha \tau}} = 1 - \frac{1}{\alpha \tau} \cdot \frac{1 - \alpha}{s + \frac{1}{\alpha \tau}}$$

da cui

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = \delta(t) - \frac{1 - \alpha}{\alpha \tau} \cdot e^{-\frac{t}{\alpha \tau}} \cdot 1(t) = -\frac{1 - \alpha}{\alpha \tau} \cdot e^{-\frac{t}{\alpha \tau}} \cdot 1(t),$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla causalità del sistema e quindi la risposta del sistema ad un generico segnale va considerata a partire dall'istante di tempo $t=0^+$.

Determiniamo ora la risposta al gradino. Si ha

$$Y(s) = \alpha \cdot \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s \left(s + \frac{1}{\alpha \tau} \right)} = \frac{k_{11}}{s} + \frac{k_{21}}{s + \frac{1}{\alpha \tau}}$$

con

$$k_{11} = \left. \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\alpha\tau}} \right|_{s=0} = \alpha$$

per la formula sui coefficienti dei fratti semplici e

$$k_{11} + k_{21} = 1$$

per il teorema dei residui, ovvero

$$k_{21} = 1 - k_{11} = 1 - \alpha.$$

Pertanto

$$Y(s) = Y(s) = \alpha \cdot \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha\tau s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1 - \alpha}{s + \frac{1}{\alpha\tau}}$$

da cui

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \left(1 + (1 - \alpha) \cdot e^{-\frac{t}{\alpha\tau}} \right) \cdot 1(t).$$

Approfondimenti consigliati:

Capitolo 2 ed esercizi del testo G. Marro, Controlli Automatici, Zanichelli, 2004.

Capitoli 4 e 5 del testo A. V. Papadopoulos, M. Prandini, Fondamenti di Automatica. Esercizi, Pearson, 2016.

Capitoli 2, 3 e 4 del testo M. Dotoli, M. P. Fanti, MATLAB – Guida al Laboratorio di Automatica, Città Studi, 2008.