

SISTEMI DINAMICI DEL SECONDO ORDINE

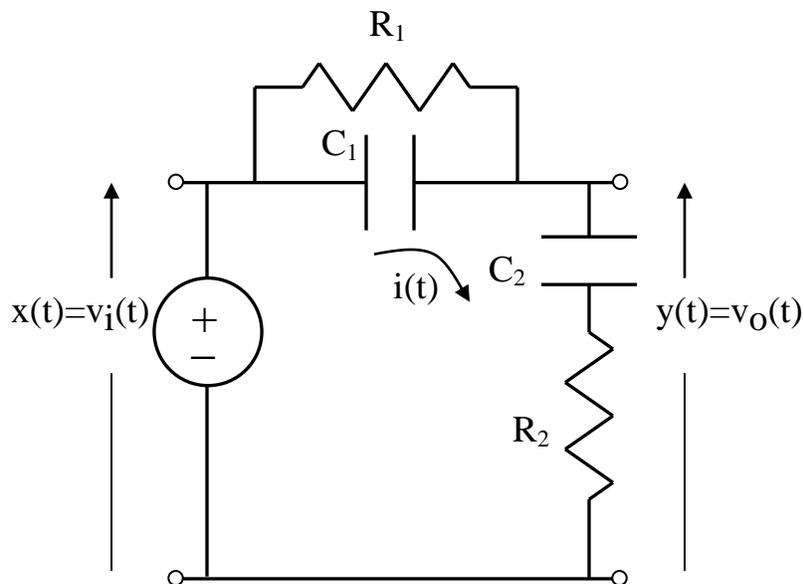
I sistemi dinamici del secondo ordine sono sistemi dinamici SISO rappresentati da equazioni differenziali lineari e a coefficienti costanti di ordine $n=2$:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

dove si è indicato con $x(t)$ il segnale ingresso e con $y(t)$ l'uscita del sistema.

ESEMPIO

Vediamo la funzione di trasferimento della rete a ritardo e anticipo.



Applichiamo alla rete elettrica la legge di Kirchoff delle tensioni e quella delle correnti, nonché le proprietà caratteristiche delle resistenze e dei condensatori:

$$v_o(t) = R_2 \cdot i(t) + \frac{1}{C_2} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

dove

$$i(t) = \frac{v_i(t) - v_o(t)}{R_1} + C_1 \frac{d(v_i(t) - v_o(t))}{dt}.$$

Sostituendo la seconda nella prima si ha:

$$v_o(t) = R_2 \cdot \frac{v_i(t) - v_o(t)}{R_1} + R_2 C_1 \frac{d(v_i(t) - v_o(t))}{dt} + \frac{1}{C_2} \int_0^t \frac{v_i(\tau) - v_o(\tau)}{R_1} d\tau + C_1 \frac{v_i(t) - v_o(t)}{C_2}$$

o anche, derivando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned} R_1 C_2 \frac{d(v_o(t))}{dt} &= R_2 C_2 \frac{d(v_i(t) - v_o(t))}{dt} + \\ &+ R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2(v_i(t) - v_o(t))}{dt^2} + (v_i(t) - v_o(t)) + R_1 C_1 \frac{d(v_i(t) - v_o(t))}{dt} \end{aligned}$$

ossia

$$R_1 C_2 \cdot y'(t) = (R_1 C_1 + R_2 C_2) \cdot (x'(t) - y'(t)) + R_1 R_2 C_1 C_2 \cdot (x''(t) - y''(t)) + (x(t) - y(t))$$

e in definitiva

$$\begin{aligned} R_1 R_2 C_1 C_2 \cdot y''(t) + (R_1 C_2 + R_1 C_1 + R_2 C_2) \cdot y'(t) + y(t) &= \\ = R_1 R_2 C_1 C_2 \cdot x''(t) + (R_1 C_1 + R_2 C_2) \cdot x'(t) + x(t) \end{aligned}$$

Trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale con condizioni iniziali nulle si ha in questo caso:

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2) s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2) s + 1 + R_1 C_2 s} = \\ &= \frac{(1 + R_1 C_1 s) \cdot (1 + R_2 C_2 s)}{(1 + R_1 C_1 s) \cdot (1 + R_2 C_2 s) + R_1 C_2 s} = \frac{(1 + \tau_1 s) \cdot (1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s) \cdot (1 + \tau_2 s) + \tau_1 \tau_2 s} = \frac{(1 + \tau_1 s) \cdot (1 + \tau_2 s)}{1 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2) s + \tau_1 \tau_2 s^2} \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2, \quad \tau_{12} = R_1 C_2.$$

In alternativa, per determinare la funzione di trasferimento della rete a ritardo e anticipo facciamo uso delle impedenze dei componenti elettrici e della regola del partitore:

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + sC_1} + R_2 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{sR_2 C_2 + 1}{\frac{sC_2}{\frac{1}{R_1} + sC_1} + sR_2 C_2 + 1} = \\ &= \frac{sR_2 C_2 + 1}{\frac{sR_1 C_2}{1 + sR_1 C_1} + sR_2 C_2 + 1} = \frac{(1 + sR_2 C_2)(1 + sR_1 C_1)}{sR_1 C_2 + (1 + sR_2 C_2)(1 + sR_1 C_1)} \end{aligned}$$

che coincide con la funzione di trasferimento precedentemente determinata.

La funzione di trasferimento è del secondo ordine, con m=2 zeri reali negativi in

$$z_1 = -\frac{1}{\tau_1}, \quad z_2 = -\frac{1}{\tau_2}$$

e n=2 poli p₁ e p₂ da determinare, che si dimostrano essere anch'essi reali negativi.

In particolare, per le note proprietà dei polinomi del secondo ordine, si ha:

$$p_1 p_2 = \frac{1}{\tau_1 \tau_2}$$

che, confrontata con le precedenti, conduce al risultato:

$$p_1 p_2 = z_1 z_2$$

ossia

$$\frac{z_1}{p_1} = \frac{p_2}{z_2}$$

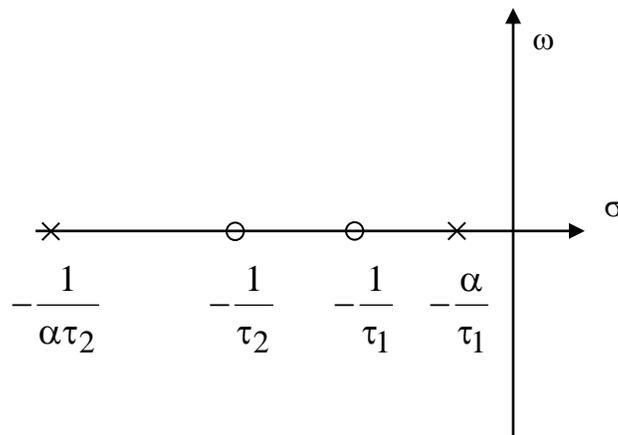
Tale relazione esprime il fatto che i poli sono disposti entrambi esternamente agli zeri o entrambi internamente agli zeri. Si verifica che la seconda condizione non è possibile, dunque detto

$$\alpha = \frac{p_1}{z_1} = \frac{z_2}{p_2} < 1$$

si ha

$$p_1 = -\frac{\alpha}{\tau_1}, \quad p_2 = -\frac{1}{\alpha\tau_2}$$

e la situazione che si verifica è quella illustrata nella seguente figura.



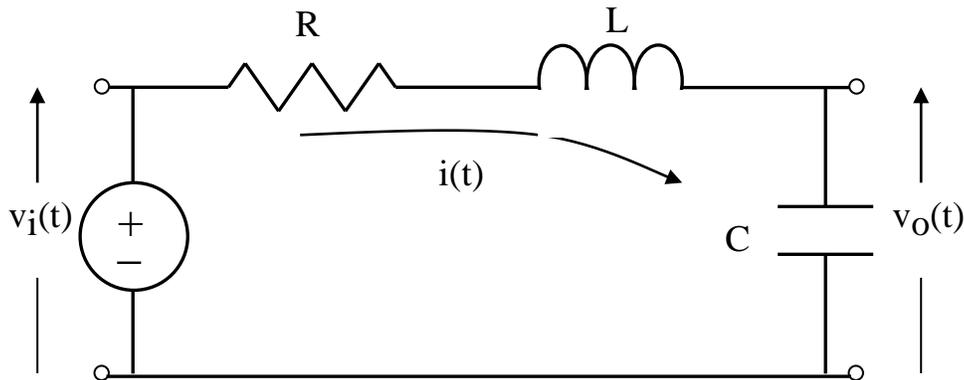
Dunque la funzione di trasferimento del sistema si esprime nella forma:

$$G(s) = \frac{(1 + \tau_1 s) \cdot (1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_{p_1} s) \cdot (1 + \tau_{p_2} s)} = \frac{(1 + \tau_1 s) \cdot (1 + \tau_2 s)}{(1 + \frac{\tau_1}{\alpha} s) \cdot (1 + \alpha\tau_2 s)} = \frac{(1 + \tau_1 s)}{(1 + \frac{\tau_1}{\alpha} s)} \cdot \frac{(1 + \tau_2 s)}{(1 + \alpha\tau_2 s)}$$

e quindi è il prodotto della funzione di trasferimento di una rete ritardatrice per quella di una rete anticipatrice, come del resto si evince anche osservando la mappa poli-zeri del sistema.

SISTEMA ELEMENTARE DEL SECONDO ORDINE

Vediamo ora il sistema elementare del secondo ordine, che è il circuito serie RLC.



L'ingresso del sistema è la tensione ai capi del generatore $v_i(t)$, l'uscita del quadripolo è la tensione ai capi del condensatore $v_o(t)$.

Determiniamo la funzione di trasferimento del sistema.

Applichiamo la legge di Kirchoff delle tensioni e le proprietà caratteristiche della resistenza, dell'induttanza e del condensatore. Si ha:

$$v_i(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_o(t)$$

da cui

$$v_i(t) = RC \frac{dv_o(t)}{dt} + LC \frac{d^2v_o(t)}{dt^2} + v_o(t)$$

o anche, se si indica con $x(t)$ l'ingresso $v_i(t)$ e con $y(t)$ l'uscita $v_o(t)$:

$$LC \cdot y''(t) + RC \cdot y'(t) + y(t) = x(t).$$

Trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale con condizioni iniziali nulle ($v_o(0)=0$, il condensatore è supposto inizialmente scarico) si ha:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{LC}}.$$

In alternativa, per determinare la funzione di trasferimento della rete elettrica elementare del secondo ordine facciamo uso delle impedenze dei componenti elettrici e della regola del partitore:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

che coincide con la funzione di trasferimento precedentemente determinata.

Riscriviamo la funzione di trasferimento del sistema del secondo ordine ponendo

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{1}{LC} \\ 2\delta\omega_n = \frac{R}{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \delta = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}.$$

Si ha

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

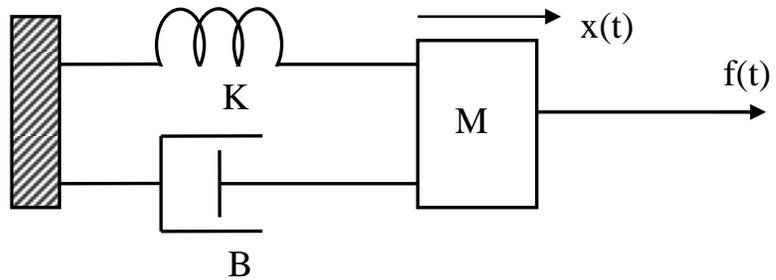
dove δ e ω_n sono detti rispettivamente coefficiente di smorzamento e pulsazione naturale del sistema.

La funzione di trasferimento della rete elettrica elementare del secondo ordine può rappresentare anche un sistema differente dal sistema in questione, ma sempre con un modello del tipo:

$$a \cdot y''(t) + b \cdot y'(t) + cy(t) = dx(t)$$

cui corrispondono due poli. Indipendentemente dalla natura fisica del sistema modellato, se la sua funzione di trasferimento è la stessa della rete elettrica del secondo ordine, esso presenta evidentemente lo stesso comportamento dinamico del circuito elettrico considerato.

Prendiamo ad esempio il sistema meccanico traslatorio in figura, in cui una massa M si muove sottoposta ad una forza orizzontale $f(t)$ essendo collegata ad un elemento fisso verticale da una molla ideale con costante elastica K e uno smorzatore ideale con coefficiente di attrito viscoso B . Evidentemente, detto $x(t)$ lo spostamento orizzontale della massa, si ha



$$f(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t)$$

da cui, scegliendo $f(t)$ come ingresso e $x(t)$ come uscita, si ottiene

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\frac{K}{M}}{s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M}} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Si ha ancora il sistema del secondo ordine elementare ma premoltiplicato per un guadagno K , il cui unico effetto è quello di modulare i valori delle ordinate delle risposte del sistema. Inoltre, per $K=1$ i due sistemi elettrico e meccanico coincidono. Poniamoci in questo caso e consideriamo dunque il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Il sistema è del secondo ordine, infatti tale è l'ordine dell'equazione differenziale che lo descrive: la funzione di trasferimento del sistema ha $m=0$ zeri e $n=2$ poli in:

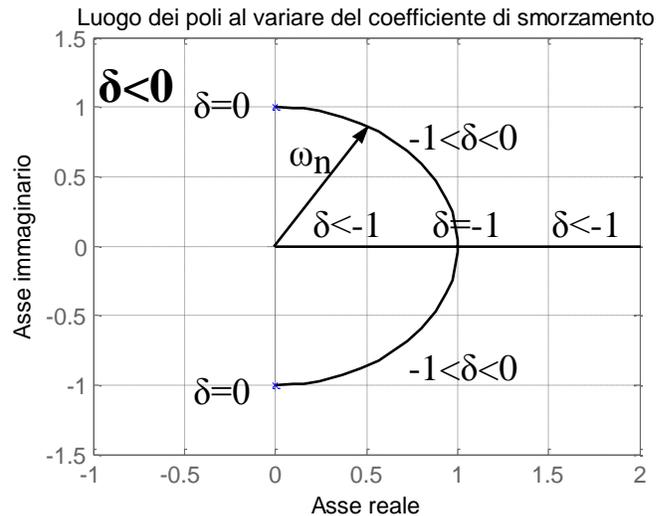
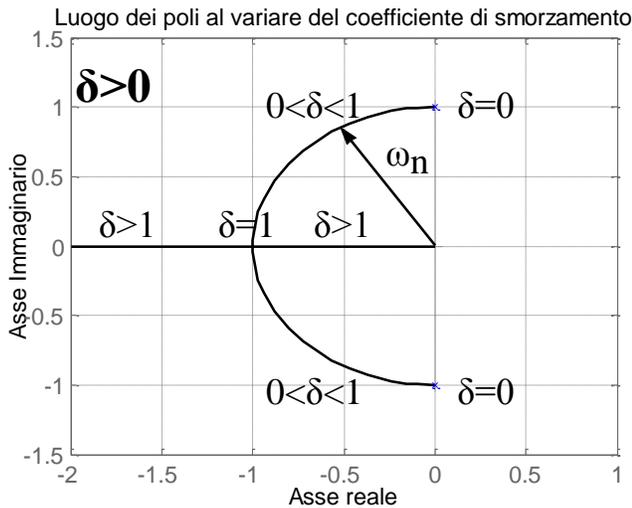
$$p_{1/2} = -\delta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\delta^2 - 1}.$$

Si presentano quindi diversi casi.

1. Per $|\delta| > 1$ le radici sono reali e distinte.
 - 1.A. Per $\delta > 1$ i poli sono reali negativi distinti.
 - 1.B. Per $\delta < -1$ i poli sono reali positivi distinti.

2. Per $|\delta| < 1$ le radici sono complesse e coniugate: $p_{1/2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$.
 - 2.A. Per $0 < \delta < 1$ i poli sono complessi e coniugati con parte reale negativa.
 - 2.B. Per $-1 < \delta < 0$ i poli sono complessi e coniugati con parte reale positiva.
 - 2.C. Per $\delta = 0$ i poli sono immaginari puri: $p_{1/2} = \pm j\omega_n$

3. Per $|\delta| = 1$ le radici sono reali coincidenti: $p_{1/2} = -\delta\omega_n$.
 - 3.A. Per $\delta = 1$ i poli sono reali negativi coincidenti in $-\omega_n$.
 - 3.B. Per $\delta = -1$ i poli sono reali positivi coincidenti in $+\omega_n$.



In particolare, poniamoci nel caso 2 ($|\delta| < 1$) e siano σ e ω_d rispettivamente la parte reale e immaginaria dei due poli, ossia:

$$p_{1/2} = \sigma \pm j\omega_d$$

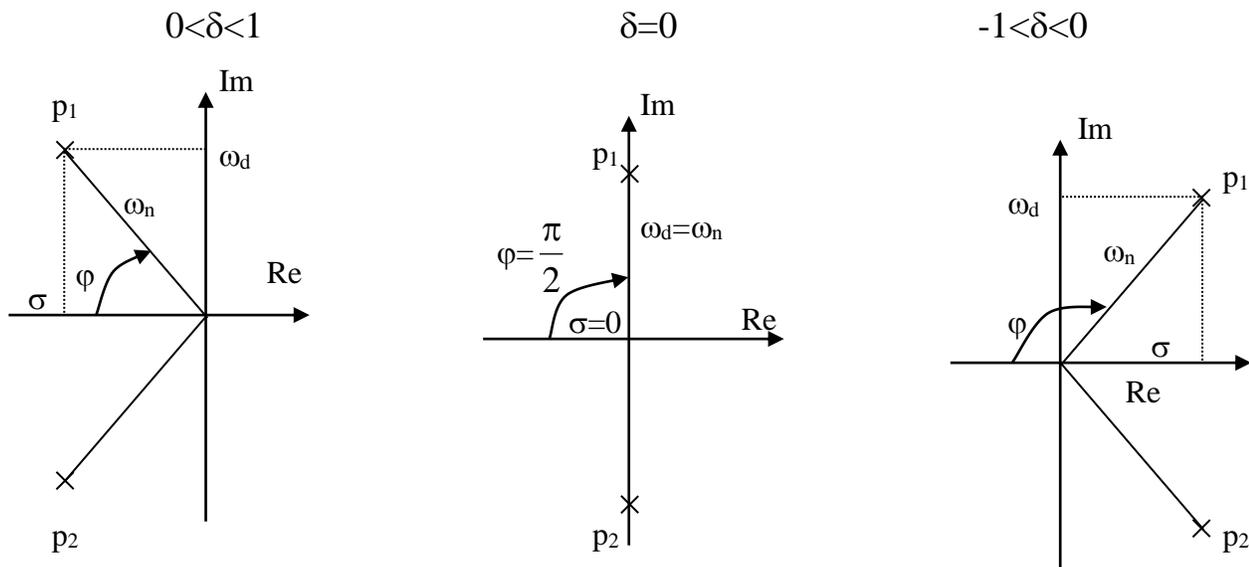
con

$$\begin{cases} \sigma = -\delta\omega_n \\ \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} < \omega_n \end{cases}.$$

Evidentemente si ha anche:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - \sigma)^2 + \omega_d^2}.$$

Il termine δ viene detto coefficiente di smorzamento dei poli, mentre ω_n è detta pulsazione naturale dei poli. Infine, ω_d è detta pulsazione smorzata dei poli.



Con semplici considerazioni geometriche si deduce che la pulsazione naturale ω_n rappresenta il modulo dei poli, infatti si ha:

$$|p_{1/2}| = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2} = \sqrt{\omega_n^2} = \omega_n.$$

Invece il coefficiente di smorzamento δ rappresenta il coseno dell'angolo formato dal raggio vettore che unisce la radice a parte immaginaria positiva con l'origine insieme al semiasse reale negativo: per tale motivo si ha $\delta > 0$ quando i poli hanno parte reale negativa e $\delta < 0$ per poli posizionati nel semipiano destro.

Ad esempio, nel caso di poli a parte reale negativa (figura nella pagina precedente in alto a sinistra), si ha:

$$-\sigma = \delta \omega_n = \omega_n \cdot \cos \varphi$$

da cui evidentemente

$$\delta = \cos \varphi, \quad \varphi = \arccos \delta.$$

Si verifica facilmente che queste ultime due relazioni sono valide anche per poli immaginari puri ($\delta=0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$) e per poli a parte reale positiva (con $-1 < \delta < 0$ e $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$).

Infatti, nel caso di poli a immaginari puri (figura nella pagina precedente in alto al centro), si ha:

$$\delta = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

da cui evidentemente

$$\delta = \cos \varphi, \quad \varphi = \arccos \delta.$$

Invece, nel caso di poli a parte reale positiva (figura nella pagina precedente in alto a destra), si ha:

$$\sigma = -\delta \omega_n = \omega_n \cdot \cos(\pi - \varphi)$$

da cui si ha ancora

$$\delta = \cos \varphi, \quad \varphi = \arccos \delta.$$

Ragionando analogamente sulla parte immaginaria si ha anche, in tutti e tre i casi precedenti:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} = \omega_n \cdot \sin \varphi$$

che si semplifica, nel caso particolare di poli immaginari puri, essendo $\varphi = \frac{\pi}{2}$, nella relazione banale

$$\omega_d = \omega_n .$$

Dalla relazione precedente sulla parte immaginaria dei poli si ha anche

$$\sqrt{1 - \delta^2} = \sin \varphi , \quad \varphi = \arcsin \sqrt{1 - \delta^2} , \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} .$$

RISPOSTA AL GRADINO DEL SISTEMA SOTTOSMORZATO

Calcoliamo ora la risposta al gradino del sistema nel caso in cui i poli siano complessi e coniugati (ossia $|\delta| < 1$).

La trasformata della risposta al gradino vale:

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s((s - \sigma)^2 + \omega_d^2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{\alpha s + \beta}{(s - \sigma)^2 + \omega_d^2}$$

con

$$k_1 = \left. \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \right|_{s=0} = 1$$

$$\frac{\alpha s + \beta}{(s - \sigma)^2 + \omega_d^2} = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} - \frac{1}{s} = \frac{\omega_n^2 - s^2 - 2\delta\omega_n s - \omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{-s - 2\delta\omega_n}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Quindi

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-s - 2\delta\omega_n}{(s - \sigma)^2 + \omega_d^2} = \frac{1}{s} - \frac{(s + \delta\omega_n)}{(s + \delta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\delta\omega_n}{(s + \delta\omega_n)^2 + \omega_d^2} =$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{(s + \delta\omega_n)}{(s + \delta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \frac{\omega_d}{(s + \delta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

da cui

$$y(t) = \left(1 - e^{-\delta\omega_n t} \cdot \cos(\omega_d t) - \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t) \right) \cdot 1(t).$$

Si ha anche

$$y(t) = \left(1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \cdot \left(\sqrt{1 - \delta^2} \cdot \cos(\omega_d t) + \delta \cdot \sin(\omega_d t) \right) \right) \cdot 1(t) =$$

$$\left(1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \cdot (\sin \varphi \cdot \cos(\omega_d t) + \cos \varphi \cdot \sin(\omega_d t)) \right) \cdot 1(t) = \left(1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi) \right) \cdot 1(t)$$

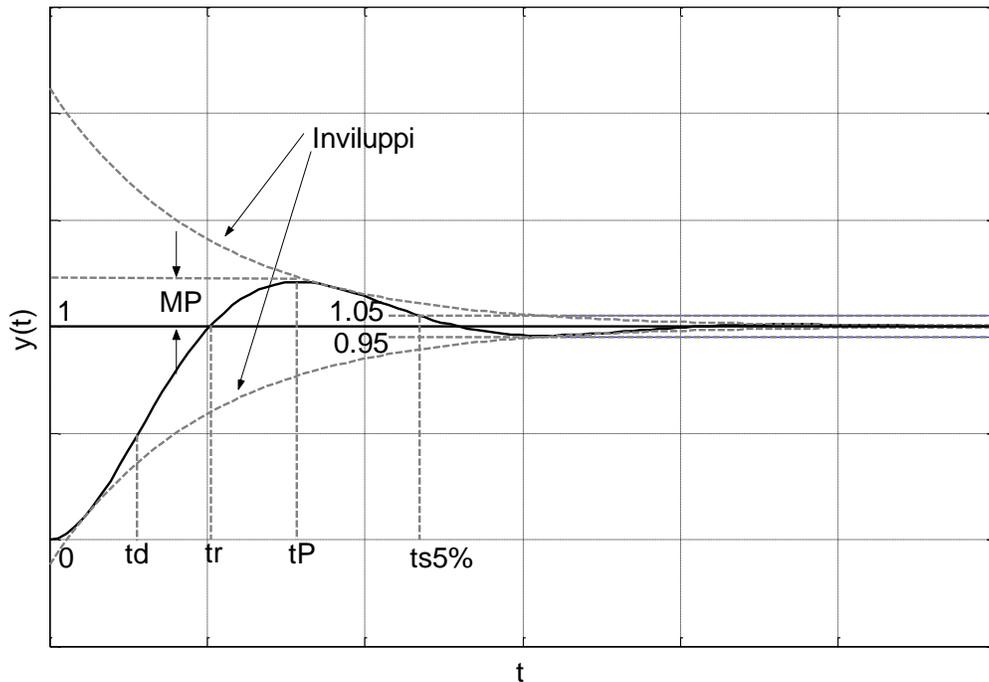
Quindi la risposta al gradino è costituita da una sinusoide modulata da un esponenziale.

Analizziamo ora la risposta al gradino per il caso particolare 2.A, in cui $0 < \delta < 1$, ossia quando i poli del sistema sono nel semipiano sinistro.

Evidentemente a regime il termine esponenziale nella risposta converge a zero, mentre il termine sinusoidale oscilla tra i valori +1 e -1. Dunque la risposta indiciale del sistema del secondo ordine per $0 < \delta < 1$ è contenuta tra due involucri, entrambi convergenti a +1 che valgono:

$$y_{i_{1/2}}(t) = \left(1 \pm \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \right) \cdot 1(t).$$

Rappresentiamo l'andamento nel tempo della risposta al gradino del sistema per $0 < \delta < 1$.



La risposta parte da $y(0^+) = 1 - \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \delta^2}} = 0$.

L'uscita del sistema converge al valore finale del gradino, ossia raggiunge il regime, infatti si ha:

$$y(+\infty) = 1$$

e la risposta al gradino ha un andamento *oscillatorio* compreso tra i due *involuppi*. I punti di massimo e minimo della risposta si trovano tutti sugli involuppi, ovvero tali punti si ottengono quando il termine sinusoidale vale +1 (punti di minimo) e -1 (punti di massimo).

Il sistema si dice *sottosmorzato*.

I parametri più importanti che descrivono la risposta indiciale di un sistema elementare del secondo ordine con poli complessi e coniugati a parte reale negativa (ovvero per $0 < \delta < 1$) sono i seguenti.

- Tempo di assestamento.
- Tempo di ritardo.
- Tempo di salita.
- Tempo di picco.
- Massima sovraelongazione percentuale.

In particolare si definisce tempo di assestamento al 5% (2% o B%) il tempo occorrente perché la risposta indiciale rimanga entro il 5% (2% o B%) del valore finale.

Si definisce perciò una banda B intorno al valore di regime: il tempo di assestamento al 5% (2% o B%) è dunque il tempo che la risposta impiega per entrare definitivamente nella banda di assestamento tra 0.95 e 1.05 (0.98 e 1.08 o 1-B/100 e 1+B/100).

Se ad esempio $t_{s5\%}$ è il tempo di assestamento al 5%, un limite superiore per il tempo di assestamento si ottiene approssimando la risposta al gradino con i suoi involuipi:

$$1 \pm \frac{e^{-\delta\omega_n t_{s5\%}}}{\sqrt{1-\delta^2}} = 1 \pm 0.05.$$

Questo calcolo, per quanto approssimato, non è dei più semplici; effettuiamo perciò una ulteriore approssimazione, supponendo che $1-\delta^2 \approx 1$. Tale approssimazione vale quando il quadrato del coefficiente di smorzamento è sufficientemente minore dell'unità, ossia per $\delta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Abbiamo così:

$$e^{-\delta\omega_n t_{s5\%}} = 0.05$$

e

$$t_{s5\%} = -\frac{\ln 0.05}{\delta\omega_n} \cong \frac{3}{\delta\omega_n} = 3\tau.$$

Si definisce dunque una costante di tempo che è l'inverso della parte reale del polo, a meno del segno:

$$\tau = -\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\delta\omega_n}.$$

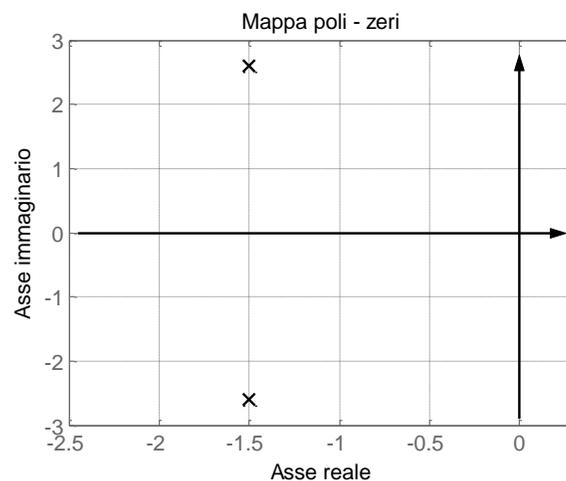
Si riottene dunque il risultato valido per i sistemi elementari del primo ordine: dopo tre costanti di tempo il sistema del secondo ordine ha raggiunto il 95% del valore finale. Analogamente si ha

$$t_{s2\%} = -\frac{\ln 0.02}{\delta\omega_n} \cong \frac{4}{\delta\omega_n} = 4\tau$$

ossia dopo quattro costanti di tempo il sistema ha già raggiunto il 98% del valore finale. Per una generica banda B% si ha infine:

$$t_{sB\%} = -\frac{\ln \frac{B}{100}}{\delta\omega_n} = -\ln \frac{B}{100} \tau.$$

In definitiva le approssimazioni fatte conducono a trattare il sistema come uno equivalente del primo ordine con una costante di tempo pari all'inverso della parte reale dei poli, a meno del segno, nell'ipotesi che il coefficiente di smorzamento sia $\delta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Come per i sistemi del primo ordine, dalle espressioni trovate per il tempo di assestamento si deduce che il sistema è tanto più lento a raggiungere il regime quanto

più elevata è la costante di tempo. Tracciando la mappa poli-zeri del sistema si conclude che esso è tanto più lento quanto più vicini sono i poli all'asse immaginario, ossia quanto più piccola è la parte reale dei poli. Quindi il sistema è tanto più veloce a raggiungere il regime quanto più grande è la parte reale dei poli.

Si definisce poi il tempo di ritardo t_d , pari al tempo necessario affinché la risposta indiciale raggiunga il 50% del valore finale.

Ancora, il tempo di salita t_r indica il tempo necessario affinché la risposta indiciale passi dal 10% (5%) al 90% (95%) del valore finale. Essendo in questo caso la risposta oscillatoria, il tempo di salita può anche definirsi come il tempo necessario a che la risposta al gradino giunga per la prima volta al valore finale, ossia passi dallo 0% al 100% del valore finale.

Una importante specifica per i sistemi del secondo ordine è la *massima sovraelongazione percentuale*, data dalla differenza tra il valore massimo dell'uscita e il valore finale, espresso in termini percentuali di quest'ultimo:

$$M_p = 100 \cdot \frac{y(t_p) - y(+\infty)}{y(+\infty)}$$

essendo t_p il *tempo di picco*, o tempo necessario per raggiungere il primo massimo nella risposta indiciale.

Calcoliamo il tempo di picco come il primo istante di tempo in cui si annulla la derivata prima della risposta:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \delta \omega_n \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi) - \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \omega_d \cdot \cos(\omega_d t + \varphi) = \\
&= \omega_n \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \left(\delta \sin(\omega_d t + \varphi) - \sqrt{1-\delta^2} \cdot \cos(\omega_d t + \varphi) \right) = \\
&= \omega_n \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \left(\cos \varphi \cdot \sin(\omega_d t + \varphi) - \sin \varphi \cdot \cos(\omega_d t + \varphi) \right) = \\
&= \omega_n \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi - \varphi) = \omega_n \frac{e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin(\omega_d t) = 0
\end{aligned}$$

da cui

$$\sin(\omega_d t) = 0$$

dunque i massimi e i minimi della risposta indiciale si ottengono per

$$\omega_d t = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

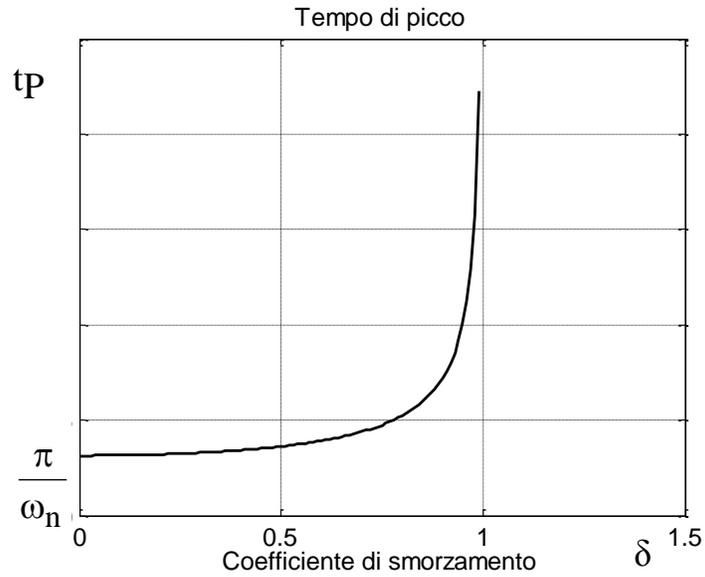
ossia

$$t = \frac{k\pi}{\omega_d}, \quad k \in \mathbb{N}$$

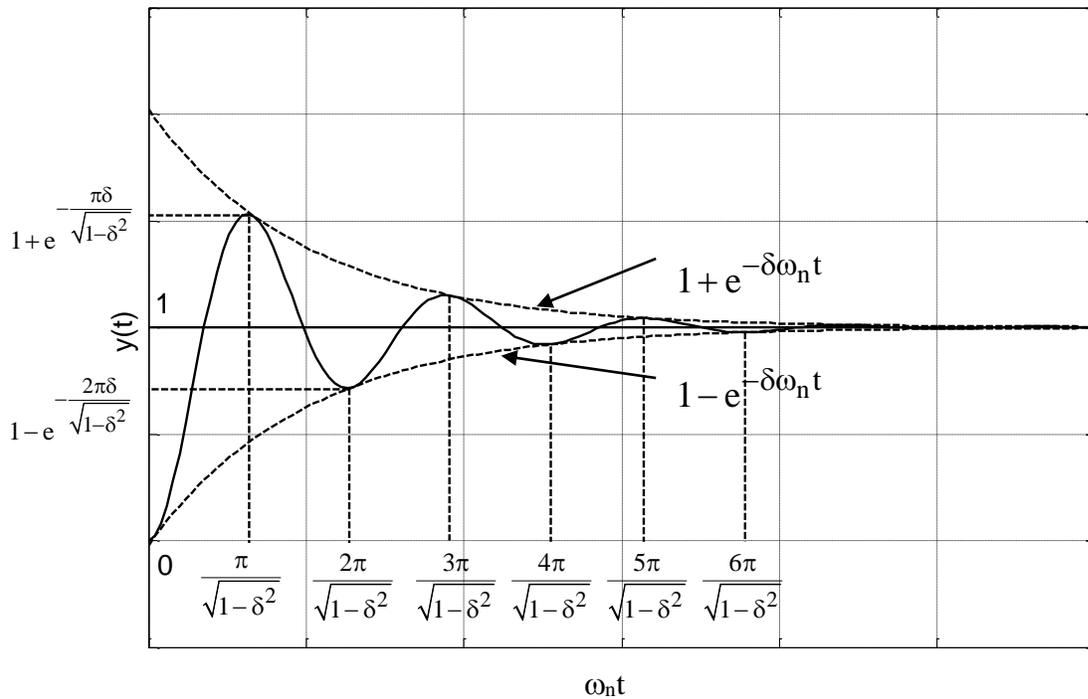
e per $k=1$ si ha il primo massimo, ovvero

$$t_P = \frac{\pi}{\omega_d}.$$

Quindi il tempo di picco dipende dalla parte immaginaria dei poli, e quanto più essi sono lontani dall'asse reale, tanto minore è tale tempo, cioè tanto più rapido è il raggiungimento del primo massimo.



L'andamento del tempo di picco rispetto al coefficiente di smorzamento è rappresentato in figura. L'andamento temporale dei massimi e minimi è rappresentato di seguito, in una scala dei tempi normalizzata rispetto alla pulsazione naturale.



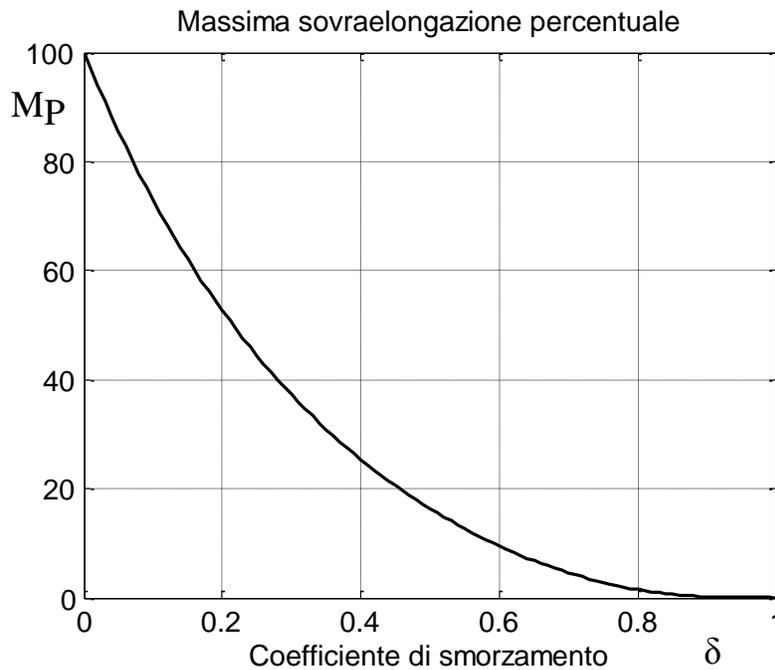
Nota il tempo di picco, è ora possibile calcolare la massima sovraelongazione percentuale dal valore del primo massimo:

$$\begin{aligned}
 y(t_P) &= 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t_P}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin(\omega_d t_P + \varphi) = 1 - \frac{e^{-\frac{\delta\omega_n \pi}{\omega_d}}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin(\pi + \varphi) = \\
 &= 1 + \frac{e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin \varphi = 1 + e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}
 \end{aligned}$$

da cui

$$M_P = 100 \cdot \frac{y(t_P) - y(+\infty)}{y(+\infty)} = 100 \cdot \frac{1 + e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} - 1}{1} = 100 \cdot e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

La massima sovraelongazione percentuale è dunque funzione unicamente del coefficiente di smorzamento. L'andamento della massima sovraelongazione percentuale rispetto al coefficiente di smorzamento è rappresentato nella figura successiva.



Valori tipici della massima sovraelongazione percentuale sono i valori dell'intervallo $M_p \in [5\%, 40\%]$, i quali si ottengono per valori del coefficiente di smorzamento $\delta \in [0.28, 0.707]$. In particolare valori notevoli della massima sovraelongazione percentuale si ottengono per $\delta = 0.6$ ($M_p \cong 10\%$) e per $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0.707$ ($M_p \cong 5\%$).

Dal grafico si nota che per $\delta = 0$ la risposta indiciale presenta il massimo picco possibile, essendo la massima sovraelongazione percentuale pari al 100%. Infatti gli esponenziali nella risposta al gradino degenerano in un termine costante che non si estingue, e la risposta è oscillatoria non smorzata. Il primo picco è pari a 2, essendo $M_p = 100\%$, e si raggiunge in un tempo $t_p = \frac{\pi}{\omega_n}$ (ottenuto per $\delta = 0$, ossia $\omega_d = \omega_n$).

All'aumentare del coefficiente di smorzamento il picco si riduce, ma il tempo per raggiungerlo t_p aumenta, sino a che il picco si annulla per $\delta = 1$: si ha *smorzamento critico* e la risposta non è più oscillatoria, ma diviene *aperiodica*, infatti $t_p \rightarrow +\infty$. In definitiva, per $\delta = 1$ la risposta tende al valore di regime raggiungendolo in un tempo infinito.

Calcoliamo ora il tempo di salita come il tempo necessario a che la risposta raggiunga per la prima volta il valore di regime:

$$y(t_r) = 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin(\omega_d t_r + \varphi) = 1$$

da cui

$$\frac{e^{-\delta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin(\omega_d t_r + \varphi) = 0$$

ossia

$$\sin(\omega_d t_r + \varphi) = 0.$$

Dunque le intercette della risposta indiciale con il gradino si ottengono per

$$\omega_d t + \varphi = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

ossia

$$t = \frac{k\pi - \varphi}{\omega_d}, \quad k \in \mathbb{N}$$

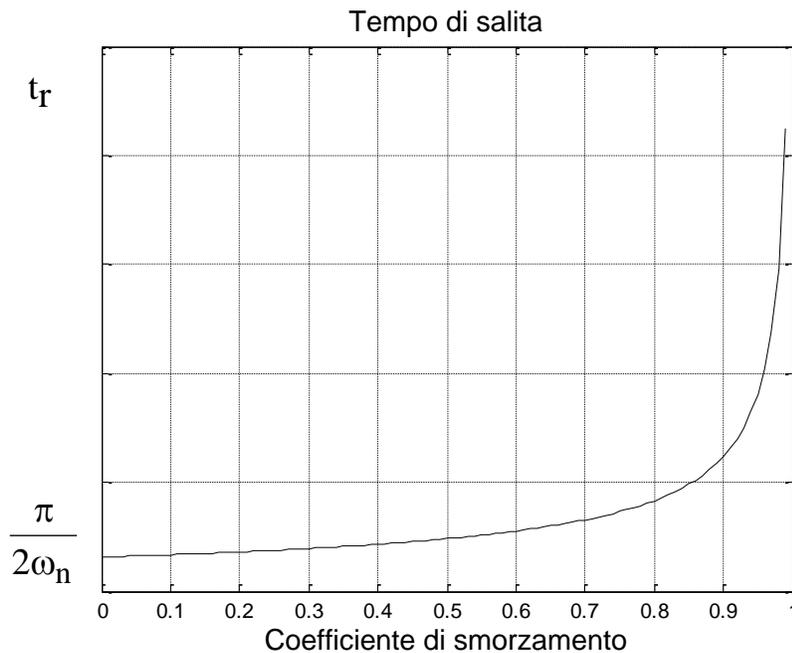
e per $k=1$ si ha la prima intercetta, ossia il tempo di salita

$$t_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d}.$$

Si ha anche

$$t_r = \frac{\pi - \arccos(\delta)}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}.$$

L'andamento del tempo di salita con il coefficiente di smorzamento è rappresentato in figura.



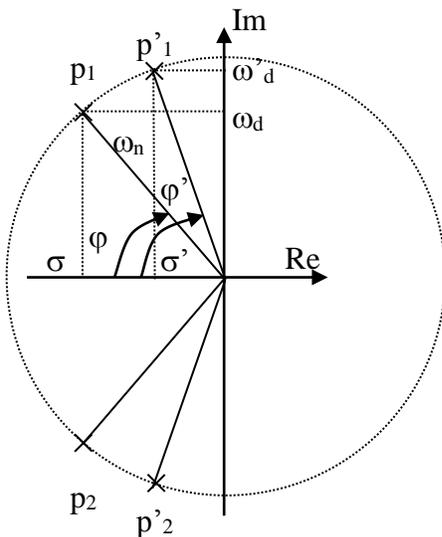
Confrontando le relative espressioni, si verifica che evidentemente il tempo di salita è sempre inferiore al tempo di picco.

Come per il tempo di picco, anche il tempo di salita è inversamente proporzionale alla parte immaginaria dei poli, quindi il sistema è tanto più veloce nel transitorio quanto più grande è la parte immaginaria dei poli. Si può dimostrare inoltre che il tempo di salita aumenta con l'aumentare del coefficiente di smorzamento.

Abbiamo visto che un risultato analogo vale per il tempo di assestamento, che si riduce con l'aumentare della parte reale dei poli.

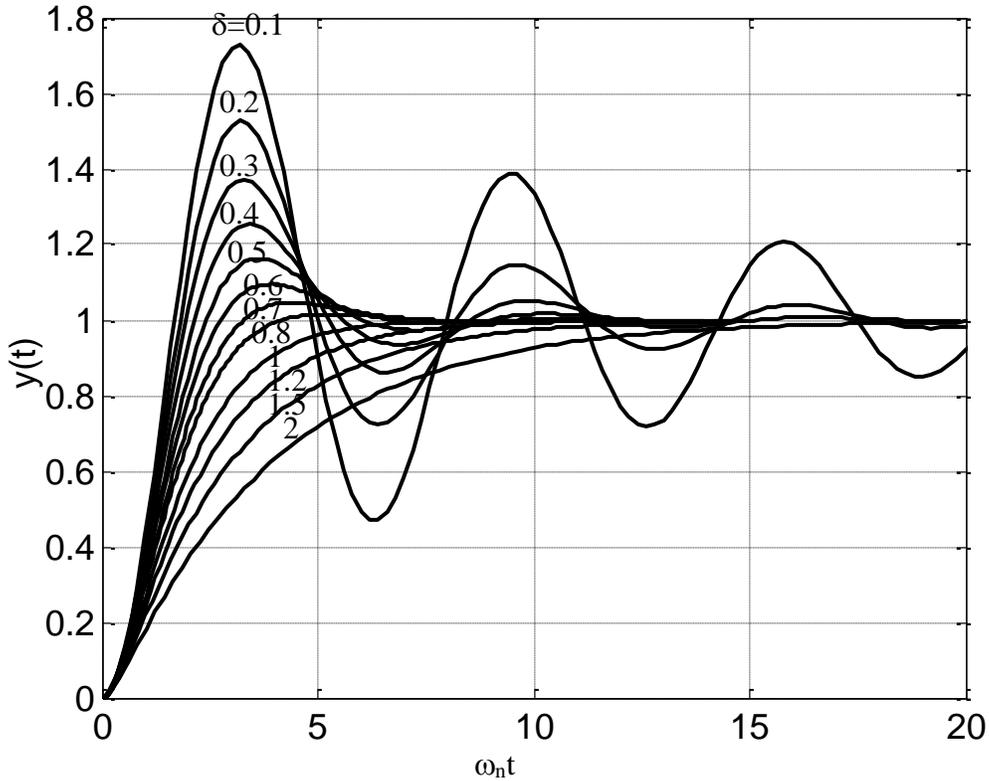
Sappiamo inoltre che l'entità del primo picco della risposta indiciale non è influenzata dalla pulsazione naturale ma dal solo coefficiente di smorzamento.

Se ad esempio manteniamo fissa la pulsazione naturale e variamo il coefficiente di smorzamento, questo corrisponde a spostare i poli del sistema lungo una circonferenza di raggio ω_n . In particolare, diminuendo il coefficiente di smorzamento, aumenta l'angolo φ e aumenta la massima sovraelongazione percentuale. Il tempo di assestamento aumenta (perché diminuisce la parte reale dei poli) mentre migliorano il tempo di picco e il tempo di salita (poiché diminuisce il coefficiente di smorzamento).



Ad esempio, nel caso in figura il sistema avente la coppia di poli p_1-p_2 presenta dei tempi di assestamento, di picco e di salita più bassi del sistema con i poli $p'_1-p'_2$.

Rappresentiamo ora l'andamento della risposta indiciale al variare del coefficiente di smorzamento (la scala dei tempi è normalizzata rispetto alla pulsazione naturale).

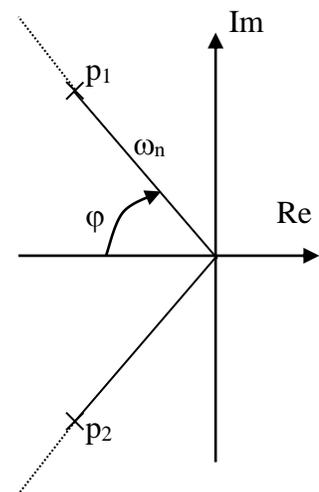


Dalla figura si osserva come diminuendo il coefficiente di smorzamento si abbia una massima sovralongazione percentuale maggiore, una diminuzione del tempo di picco e del tempo di salita, nonché un aumento del tempo di assestamento.

Consideriamo ora il caso in cui sia mantenuto fisso il coefficiente di smorzamento e venga variata la pulsazione naturale.

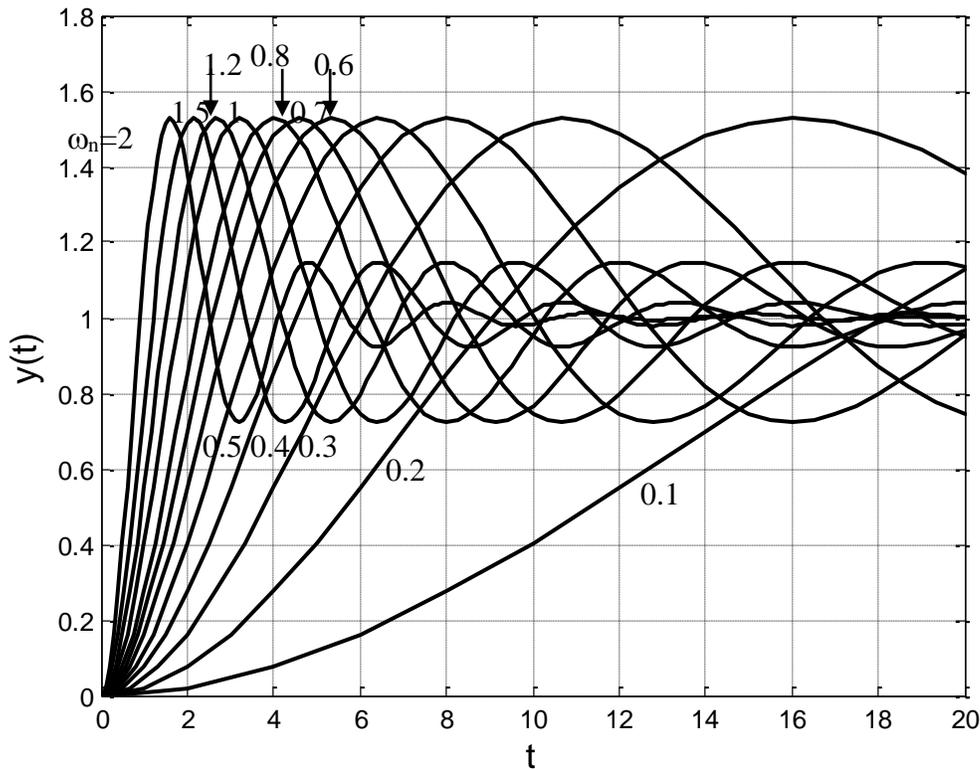
Questo corrisponde a spostare i poli del sistema lungo una retta uscente dall'origine che forma un angolo $\varphi = \arccos \delta$ con il semiasse reale negativo.

δ costante
 $\omega_n > 0$ varia



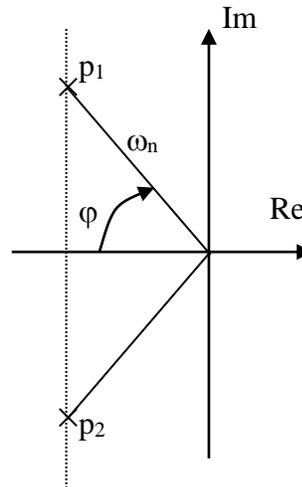
In tal caso, mentre resta fissa la massima sovraelongazione percentuale, ossia l'entità del primo picco, si modificano gli involuppi della risposta indiciale e quindi il tempo di assestamento. In particolare quest'ultimo si riduce all'aumentare della pulsazione naturale, rendendo il sistema più pronto.

Variando la sola pulsazione naturale si ottengono gli andamenti della risposta indiciale nella figura seguente. In definitiva cambiare la pulsazione naturale del sistema ω_n equivale a cambiare l'asse dei tempi: più ω_n è elevato, più contratto è l'asse dei tempi. Infatti, aumentando la pulsazione naturale si riducono i tempi di assestamento, di picco e di salita, mentre la massima sovraelongazione percentuale (che dipende unicamente dal coefficiente di smorzamento) non subisce variazioni.



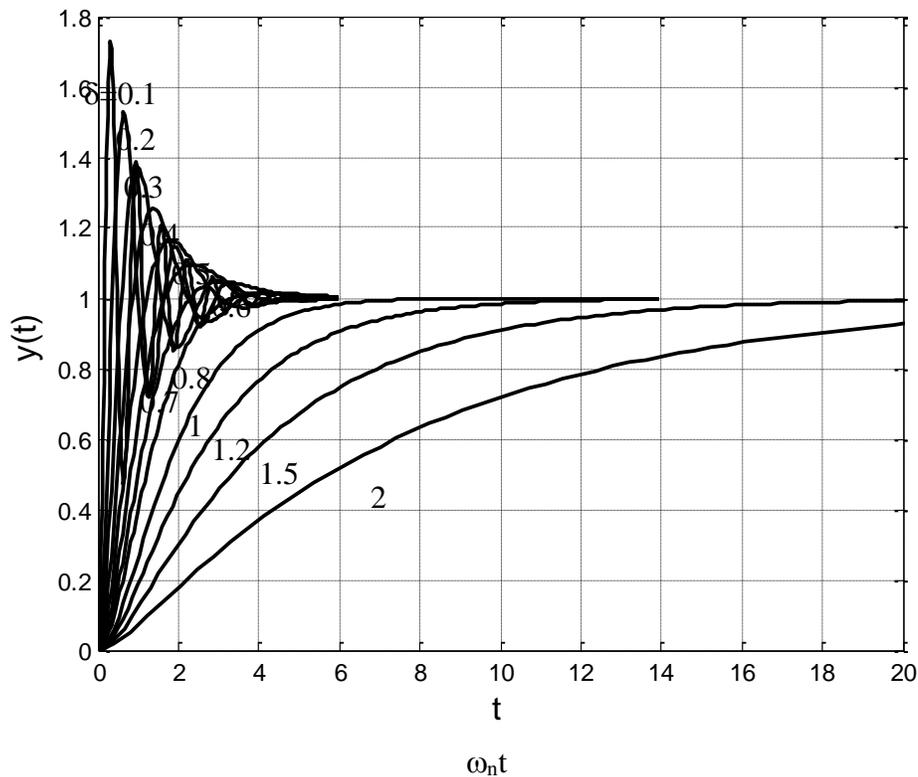
Consideriamo infine il caso in cui la funzione di trasferimento del sistema sia modificata mantenendo fisso il prodotto del coefficiente di smorzamento per la pulsazione naturale, ossia la parte reale dei poli. Ciò corrisponde a muovere i poli del sistema lungo una retta verticale di ascissa $-\delta\omega_n$.

$\delta > 0$ varia
 $\delta \omega_n$ costante



Gli andamenti temporali che si ottengono per la risposta al gradino sono diagrammati di seguito.

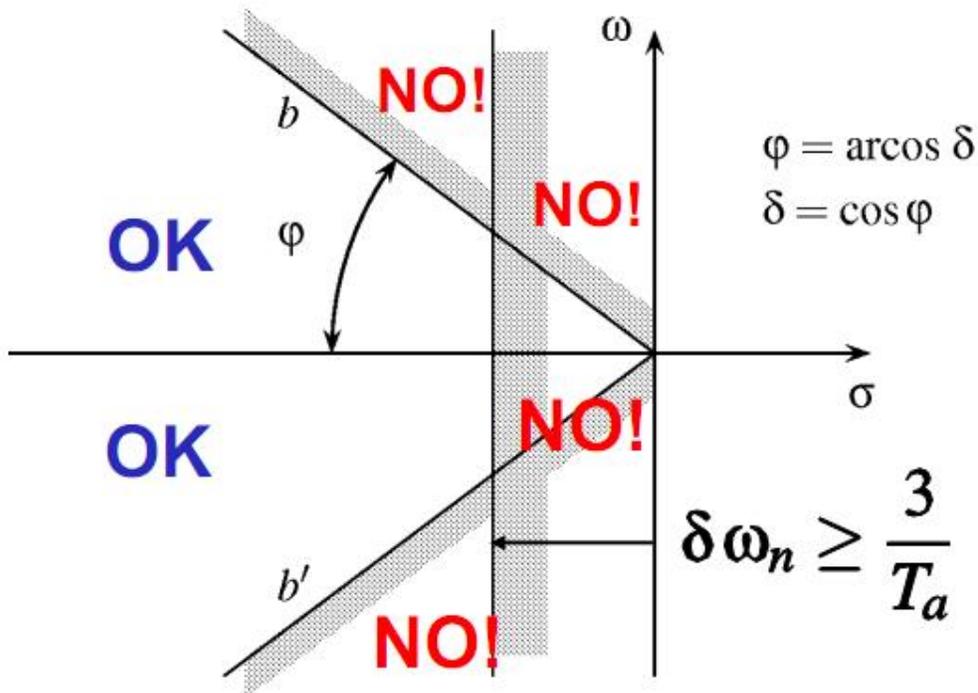
Evidentemente in questo caso la parte reale dei poli rimane invariata, dunque non cambia il tempo di assestamento (poiché gli involuipi della funzione sono gli stessi). Cambiano invece la rapidità del transitorio e l'entità del picco: aumentando il coefficiente di smorzamento δ (e riducendosi la pulsazione naturale) aumentano il tempo di picco e il tempo di salita, mentre si riduce la massima sovraelongazione percentuale.

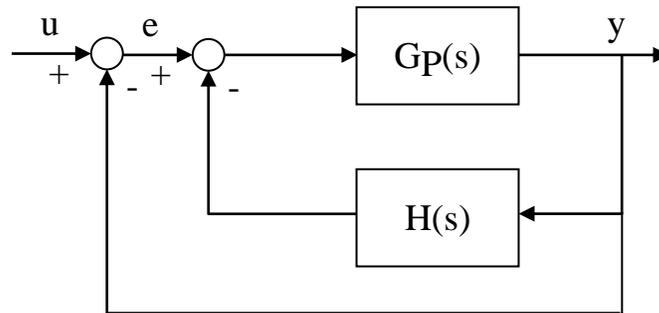


Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce la riproduzione per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Possiamo dunque concludere che un sistema elementare del secondo ordine con poli complessi coniugati e coefficiente di smorzamento δ con $0 < \delta < 1$ è tanto più veloce nel transitorio e nel regime quanto più lontani sono i suoi poli dall'origine del piano complesso.

Infine osserviamo che le specifiche quindi impongono ai poli di trovarsi in una particolare zona del piano complesso di Gauss. Tipicamente, una specifica su un valore di sovraelongazione percentuale massimo, corrispondendo a una specifica su un coefficiente di smorzamento minimo, impone il massimo angolo φ accettabile dei poli, mentre una specifica sul tempo di assestamento massimo, corrispondendo a una specifica su una costante di tempo massima, impone la minima parte reale in valore assoluto $|\sigma| = \delta\omega_n$ dei poli accettabile.



ESEMPIO

Si consideri un motore elettrico alimentato in corrente continua, avente funzione di trasferimento:

$$G_p(s) = \frac{k_1}{s(s+10)}.$$

Si assuma che il motore sia retroazionato con una dinamo tachimetrica avente funzione di trasferimento:

$$H(s) = k_2 s.$$

Inoltre, tutto il motore è retroazionato come in figura. Si determinino le due costanti del motore k_1 e della dinamo k_2 in modo che il sistema in anello chiuso presenti un tempo di assestamento al 5% $t_s \leq 0.5$ s e una massima sovraelongazione percentuale $M_p \leq 5\%$.

Si ha evidentemente:

$$G_0(s) = \frac{\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}}{1 + \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}} = \frac{G(s)}{1+G(s)(H(s)+1)} = \frac{\frac{k_1}{s(s+10)}}{1 + \frac{k_1(1+k_2s)}{s(s+10)}} = \frac{k_1}{s^2 + (10+k_1k_2)s + k_1}.$$

Si pone:

$$G_0(s) = \frac{k_1}{s^2 + (10+k_1k_2)s + k_1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2},$$

da cui

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{k_1} \\ \delta = \frac{(10+k_1k_2)}{2\sqrt{k_1}} \end{cases}$$

Dalle specifiche imposte deve essere:

$$\begin{cases} 0.5 \geq \frac{3}{\delta\omega_n} \\ 5 \geq 100 \times e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n \geq \frac{6}{\delta} \\ \delta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

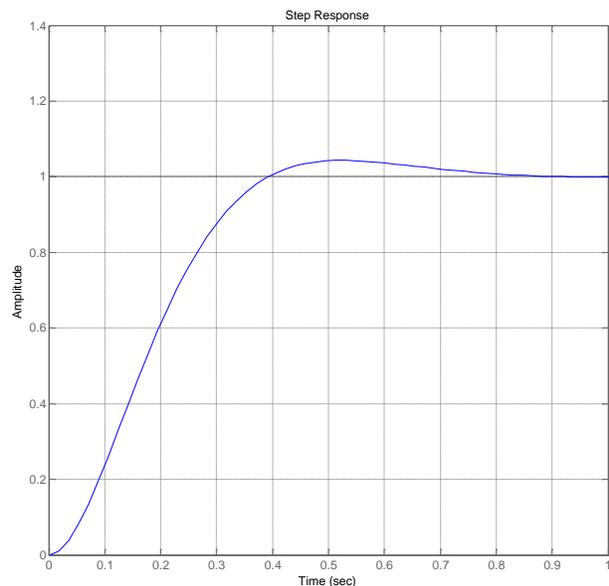
da cui ad esempio si pone

$$\begin{cases} \omega_n = 6\sqrt{2} \\ \delta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{k_1} = 6\sqrt{2} \\ \frac{(10+k_1k_2)}{2\sqrt{k_1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 72 \\ \frac{(10+72k_2)}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 72 \\ 5+36k_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 72 \\ k_2 = \frac{1}{36} \end{cases}$$

Si ha in definitiva

$$G_0(s) = \frac{72}{s^2 + 12s + 72},$$

che ha le caratteristiche richieste, come confermato dalla risposta al gradino in figura.



Abbiamo così concluso l'analisi del caso 2.A, in cui $0 < \delta < 1$.

RISPOSTA AL GRADINO DEL SISTEMA SOTTOSMORZATO CON $\delta < 0$

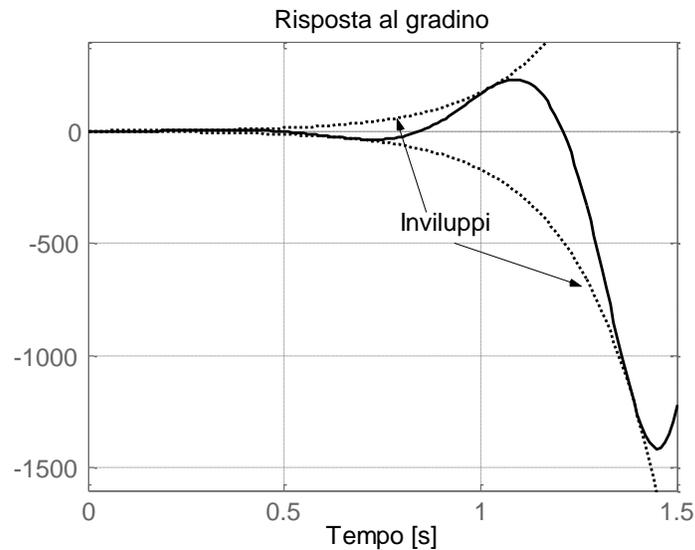
Consideriamo ora il caso 2.B, in cui i poli sono complessi e coniugati con parte reale positiva ($-1 < \delta < 0$). La risposta del sistema è ancora la stessa, ossia:

$$y(t) = \left(1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi) \right) \cdot 1(t).$$

Essendo il coefficiente di smorzamento negativo, l'esponenziale è divergente e lo sono anche gli inviluppi.

Il sistema è oscillatorio non smorzato con ampiezza crescente; non si può parlare di regime. Ciò era prevedibile, poiché i poli sono a parte reale positiva ed hanno modi associati divergenti.

La risposta al gradino con i suoi inviluppi è rappresentata in figura.



RISPOSTA AL GRADINO DEL SISTEMA PRIVO DI SMORZAMENTO

Consideriamo ora il caso 2.C, in cui i poli sono immaginari puri ($\delta=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$). La risposta del sistema si ottiene dalla precedente sostituendo $\delta=0$, ossia:

$$y(t) = \left(1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi) \right) \cdot 1(t) \Bigg|_{\delta=0} = \left(1 - \sin\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) \right) \cdot 1(t) = (1 - \cos(\omega_n t)) \cdot 1(t).$$

Essendo il coefficiente di smorzamento nullo, il termine esponenziale diviene costante e quindi gli involucri sono due rette orizzontali di ordinata rispettivamente 0 e 2.

La risposta al gradino del sistema è una sinusoide non smorzata, con pulsazione pari alla pulsazione naturale. Il tempo di picco vale

$$t_P = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n}$$

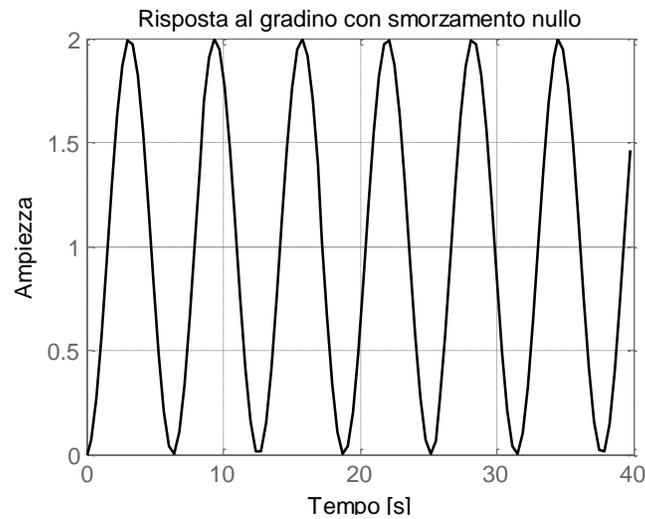
mentre il tempo di salita è

$$t_r = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{\omega_d} = \frac{\pi}{2\omega_n}$$

e la sovraelongazione percentuale è del 100%, infatti si ha:

$$M_P = 100 \cdot \frac{y(t_P) - y(+\infty)}{y(+\infty)} = 100 \cdot \frac{2-1}{1} = 100\% .$$

Infine, il tempo di assestamento è infinito, poiché la risposta non si assesta mai ad un valore di regime.



RISPOSTA AL GRADINO DEL SISTEMA CON SMORZAMENTO CRITICO

Consideriamo ora il caso 3.A, in cui $\delta=1$, ossia i due poli sono reali coincidenti in $-\omega_n$.
Si ha:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

quindi la trasformata della risposta al gradino vale:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = \frac{k_{11}}{s} + \frac{k_{21}}{(s + \omega_n)^2} + \frac{k_{22}}{s + \omega_n}$$

dove

$$k_{11} = \left. \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \right|_{s=0} = 1$$

$$k_{21} = \left. \frac{\omega_n^2}{s} \right|_{s=-\omega_n} = -\omega_n$$

$$k_{22} = -k_{11} = -1$$

dove l'ultima relazione deriva dal teorema dei residui. Quindi

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{1}{s + \omega_n}$$

da cui

$$y(t) = \left(1 - \omega_n \cdot t \cdot e^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t}\right) \cdot 1(t).$$

Quindi

$$y(0^+) = 0.$$

Si osserva che per $t > 0$

$$y'(t) = -\omega_n \cdot e^{-\omega_n t} + \omega_n^2 \cdot t \cdot e^{-\omega_n t} + \omega_n \cdot e^{-\omega_n t} = \omega_n^2 \cdot t \cdot e^{-\omega_n t}$$

da cui

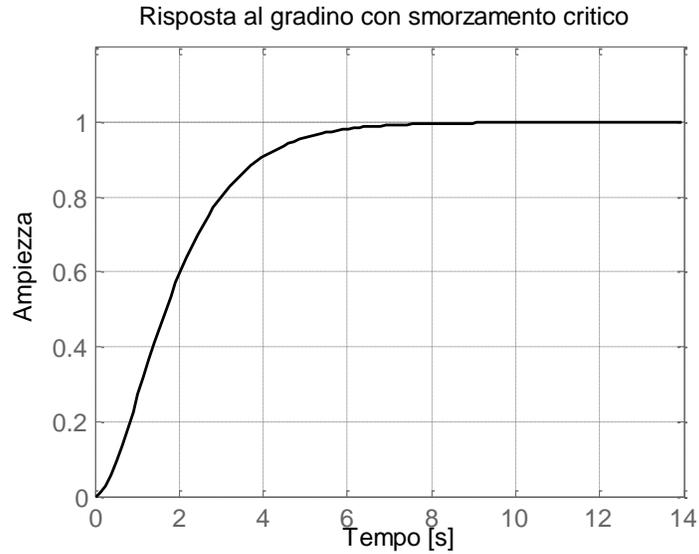
$$y'(0^+) = 0.$$

Inoltre per il teorema del valore finale si ha

$$y(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} = 1.$$

La risposta al gradino ottenuta è diagrammata nella figura seguente. Si tratta di una risposta aperiodica, simile a quella ottenuta per il sistema elementare del primo ordine, ma più lenta nel primo tratto (la curva si stacca dall'origine restando tangente all'asse reale).

In questo caso si verifica che il tempo di salita, il tempo di picco e il tempo di assestamento sono infiniti, mentre la massima sovraelongazione percentuale è nulla. Si dice che il sistema presenta uno smorzamento critico.



RISPOSTA AL GRADINO DEL SISTEMA CON SMORZAMENTO CRITICO CON $\delta=-1$

Consideriamo ora il caso 3.B, in cui $\delta=-1$, ossia i due poli sono reali coincidenti in $+\omega_n$.

Si ha:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s - \omega_n)^2}$$

quindi la trasformata della risposta al gradino vale:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s - \omega_n)^2} = \frac{k_{11}}{s} + \frac{k_{21}}{(s - \omega_n)^2} + \frac{k_{22}}{s - \omega_n}$$

dove

$$k_{11} = \frac{\omega_n^2}{(s - \omega_n)^2} \Big|_{s=0} = 1$$

$$k_{21} = \frac{\omega_n^2}{s} \Big|_{s=+\omega_n} = \omega_n$$

$$k_{22} = -k_{11} = -1$$

dove l'ultima relazione deriva dal teorema dei residui. Quindi

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{\omega_n}{(s - \omega_n)^2} - \frac{1}{s - \omega_n}$$

da cui si ottiene una risposta divergente (infatti i poli sono posizionati nel semipiano destro):

$$y(t) = \left(1 + \omega_n \cdot t \cdot e^{\omega_n t} - e^{\omega_n t}\right) \cdot 1(t).$$



Si osserva ancora che

$$y(0^+) = 0.$$

Inoltre per $t > 0$ si ha:

$$y'(t) = \omega_n^2 \cdot t \cdot e^{\omega_n t}$$

da cui

$$y'(0^+) = 0.$$

Osserviamo che non vale il teorema del valore finale, essendo violate le sue ipotesi. Infatti si ha:

$$y(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + (\omega_n t - 1)e^{\omega_n t} \right) = +\infty$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega_n^2}{(s - \omega_n)^2} = 1 \neq y(+\infty)$$

RISPOSTA AL GRADINO DEL SISTEMA SOVRASMORZATO

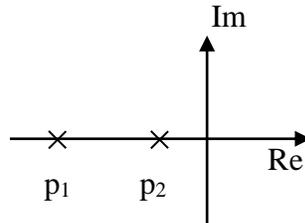
Sia ora il caso 1.A, in cui $\delta > 1$, ossia i due poli sono reali distinti e negativi. Si ha:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

dove supponiamo $|p_1| > |p_2|$, ossia (si veda la mappa dei poli in figura):

$$p_1 = -\delta\omega_n - \omega_n \sqrt{\delta^2 - 1},$$

$$p_2 = -\delta\omega_n + \omega_n \sqrt{\delta^2 - 1}$$



e risulta

$$p_1 - p_2 = -2\omega_n \sqrt{\delta^2 - 1}.$$

La trasformata della risposta al gradino vale:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s-p_1} + \frac{k_3}{s-p_2}$$

dove

$$k_1 = \left. \frac{\omega_n^2}{(s-p_1)(s-p_2)} \right|_{s=0} = \left. \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \right|_{s=0} = 1$$

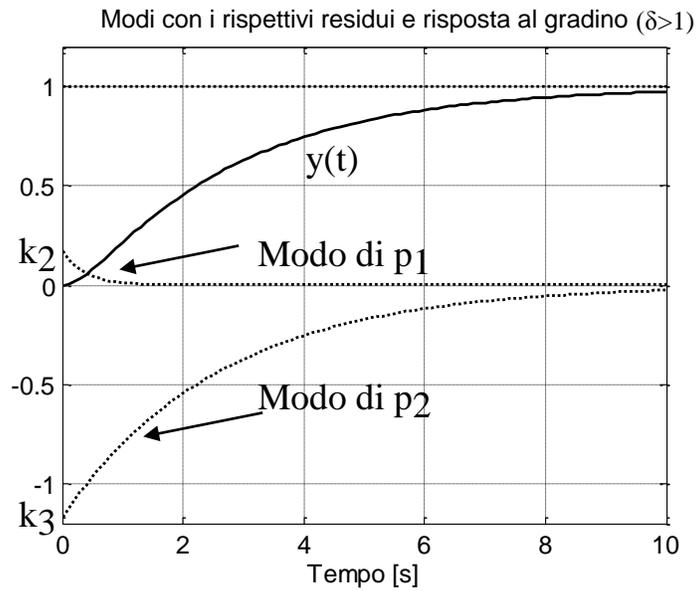
$$k_2 = \left. \frac{\omega_n^2}{s(s-p_2)} \right|_{s=p_1} = \frac{\omega_n^2}{p_1(p_1-p_2)} = -\frac{\omega_n^2}{p_1 \cdot 2\omega_n \sqrt{\delta^2 - 1}} = -\frac{\omega_n}{2p_1 \sqrt{\delta^2 - 1}} > 0$$

$$k_3 = \left. \frac{\omega_n^2}{s(s-p_1)} \right|_{s=p_2} = \frac{\omega_n^2}{p_2(p_2-p_1)} = \frac{\omega_n^2}{p_2 \cdot 2\omega_n \sqrt{\delta^2 - 1}} = \frac{\omega_n}{2p_2 \sqrt{\delta^2 - 1}} < 0$$

da cui

$$y(t) = \left(1 + k_2 \cdot e^{p_1 t} + k_3 \cdot e^{p_2 t} \right) \cdot 1(t)$$

$$y(t) = \left(1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\delta^2 - 1}} \cdot \left(-\frac{1}{p_1} \cdot e^{p_1 t} + \frac{1}{p_2} \cdot e^{p_2 t} \right) \right) \cdot 1(t).$$



La risposta al gradino con i modi corrispondenti è diagrammata nella figura precedente (si osserva che $|k_2| < |k_3|$, poiché $|p_1| > |p_2|$).

Il sistema si dice sovrasmorzato ($\delta > 1$).

Si osserva che il modo di p_1 è più rapido ad estinguersi di quello di p_2 , essendo quest'ultimo polo più vicino all'asse immaginario. Inoltre il valore iniziale della risposta è

$$y(0) = 1 + k_2 + k_3 = 0$$

per il teorema dei residui, mentre per $t > 0$ si ha

$$y'(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\delta^2 - 1}} \cdot \left(-e^{p_1 t} + e^{p_2 t} \right)$$

da cui

$$y'(0^+) = 0$$

ed infine

$$y(+\infty) = 1.$$

Dette τ_1 e τ_2 le costanti di tempo dei poli p_1 e p_2 , si può anche riscrivere la risposta al gradino come segue:

$$y(t) = \left(1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\delta^2 - 1}} \cdot \left(\tau_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right) \cdot 1(t).$$

Si osserva ancora che degli ultimi due modi il più influente è quello relativo al polo più vicino all'asse immaginario p_2 . Quest'ultimo è dunque il polo *dominante*.

Si ha una effettiva dominanza se risulta $\left| \frac{p_1}{p_2} \right| > 10$, ovvero per $\tau_1 \approx 0$ e $\delta \gg 1$. In tal caso si può approssimare il sistema con quello del primo ordine avente un solo polo in p_2 , poiché risulta:

$$\begin{aligned} y(t) &\approx \left(1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\delta^2 - 1}} \cdot \tau_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \cdot 1(t) = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - 1}(\delta - \sqrt{\delta^2 - 1})} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \cdot 1(t) = \\ &= \left(1 - \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}}{2\sqrt{\delta^2 - 1}(\delta^2 - \delta^2 + 1)} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \cdot 1(t) = \left(1 - \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}}{2\sqrt{\delta^2 - 1}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \cdot 1(t) \approx \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \cdot 1(t) \end{aligned}$$

e il tempo di assestamento al 5% vale ad esempio:

$$t_{s5\%} \cong 3\tau_2.$$

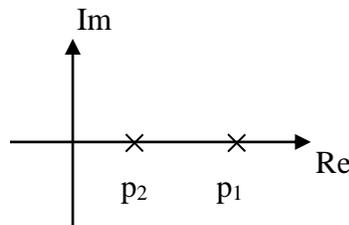
RISPOSTA AL GRADINO DEL SISTEMA SOVRASMORZATO CON $\delta < -1$

Analizziamo infine il caso 1.B, in cui $\delta < -1$, ossia i due poli sono reali distinti e positivi.

Si ha ancora:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

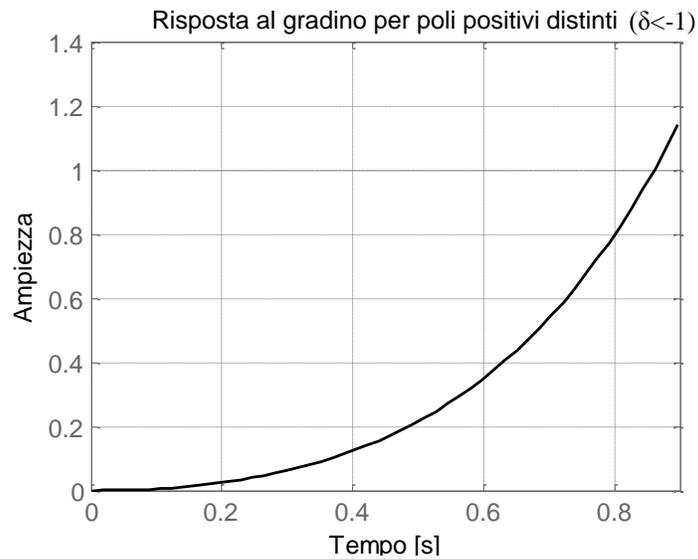
dove supponiamo $|p_1| > |p_2|$ come in figura.



La risposta al gradino si esprime ancora come segue:

$$y(t) = \left(1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\delta^2 - 1}} \cdot \left(-\frac{1}{p_1} \cdot e^{p_1 t} + \frac{1}{p_2} \cdot e^{p_2 t} \right) \right) \cdot 1(t)$$

e in questo caso diverge, poiché i modi sono relativi a poli posizionati nel semipiano destro del piano complesso. Non ha senso parlare di regime e anche in questo caso non vale il teorema del valore finale.



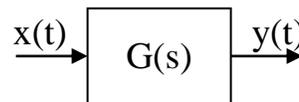
Nella figura precedente viene rappresentata la risposta al gradino di questo sistema.

SISTEMI DINAMICI DEL SECONDO ORDINE CON ZERI

Si vuole ora esaminare l'effetto di uno zero sul comportamento di un sistema del secondo ordine, in particolare nel caso in cui il sistema ha due poli complessi.

Consideriamo quindi un sistema dinamico del secondo ordine come in figura, avente funzione di trasferimento del tipo:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2 (1 + \tau s)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$



con pulsazione naturale $\omega_n > 0$ e avente, per semplicità (in quanto trattasi del caso più comune ed anche di maggiore interesse), poli complessi e coniugati (ovvero $-1 < \delta < 1$). Il sistema presenta uno zero in $z = -\frac{1}{\tau}$ che è a fase minima (ossia posto nel semipiano sinistro) per $\tau > 0$, mentre è a fase non minima (ossia posto nel semipiano destro) se $\tau < 0$. Evidentemente, per $\tau = 0$ lo zero scompare e il sistema si riconduce al generico sistema elementare del secondo ordine.

Calcoliamo la risposta al gradino, detta $y_2(t)$, del sistema. Evidentemente risulta:

$$Y_2(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{\omega_n^2(1 + \tau s)}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)s} = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)s} + \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)s} \cdot \tau s.$$

Se ora indichiamo con $y_1(t)$ la risposta al gradino di un generico sistema del secondo ordine con poli complessi e coniugati e privo di zeri, si ha evidentemente:

$$Y_1(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)s}$$

e dal confronto delle due precedenti relazioni si deduce che

$$Y_2(s) = Y_1(s) + Y_1(s) \cdot \tau s.$$

Sappiamo che

$$y_1(t) = \left(1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi) \right) \cdot 1(t)$$

con

$$y_1(0)=0$$

quindi antitrasformando la relazione tra $Y_2(s)$ e $Y_1(s)$ si ha:

$$y_2(t) = y_1(t) + \tau \frac{dy_1(t)}{dt}.$$

Abbiamo visto in precedenza nel calcolo del tempo di picco che per $t > 0$ vale la relazione

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \omega_n \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin(\omega_d t)$$

che è un termine che converge a zero per $t \rightarrow +\infty$. Quindi la risposta al gradino di un sistema del secondo ordine con uno zero si comporta per $t \rightarrow +\infty$ come la risposta al gradino di un sistema del secondo ordine privo di zeri. Ciò era prevedibile in quanto la presenza di qualche zero non cambia i modi della funzione di trasferimento, ma solo i coefficienti dei fratti semplici. In altre parole si ha:

$$y_2(+\infty) = y_1(+\infty) + \tau \dot{y}_1(+\infty) = y_1(+\infty)$$

il cui valore dipende dalla posizione dei poli nel piano di Gauss (ovvero dalla loro parte reale).

Inoltre si ha

$$\frac{dy_1(0^+)}{dt} = 0$$

da cui

$$y_2(0^+) = 0$$

quindi la risposta al gradino di un sistema del secondo ordine con uno zero inizia ad evolvere dal valore nullo come la risposta al gradino di un sistema del secondo ordine privo di zeri. Osserviamo poi che per $t > 0$ vale:

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{dy_1(t)}{dt} + \tau \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy_1(t)}{dt} \right) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \left(-\delta\omega_n e^{-\delta\omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t) + e^{-\delta\omega_n t} \cdot \omega_d \cdot \cos(\omega_d t) \right) = \\ &= \frac{\omega_n^2 e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot (-\cos\varphi \cdot \sin(\omega_d t) + \sin\varphi \cdot \cos(\omega_d t)) = \frac{\omega_n^2 e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin(\varphi - \omega_d t)\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{d^2 y_1(0^+)}{dt^2} = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \sin\varphi = \omega_n^2$$

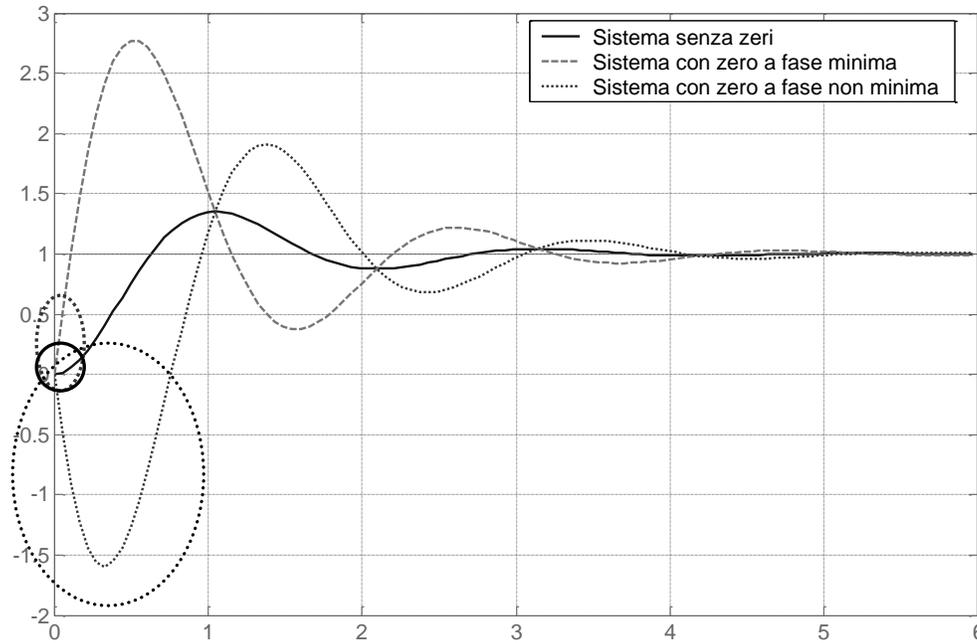
e in definitiva

$$\frac{dy_2(0^+)}{dt} = \frac{dy_1(0^+)}{dt} + \tau \frac{d^2 y_1(0^+)}{dt^2} = 0 + \tau\omega_n^2 = \tau\omega_n^2$$

che è un valore positivo se lo zero è a fase minima ($\tau > 0$), è negativo se lo zero è a fase non minima ($\tau < 0$) e nullo per $\tau = 0$.

In definitiva la presenza di uno zero in un sistema del secondo ordine non modifica né il valore iniziale né il valore finale della risposta al gradino; ciò che cambia è il modo in cui la risposta al gradino si stacca dall'asse dei tempi. Se lo zero è posto nel semipiano sinistro la derivata nell'origine della risposta al gradino è positiva, mentre nel caso senza zeri si ha derivata nulla. Se invece lo zero è posto nel semipiano destro tale derivata è negativa, dunque inizialmente la risposta del sistema è più lenta rispetto ai due casi precedenti: la risposta al gradino inizia ad evolvere tendendo non verso il valore di ordinata dell'ingresso (pari a 1), bensì evolvendo verso le ordinate negative. In altre parole, se lo zero è a fase non minima inizialmente il sistema non evolve in modo da seguire l'ingresso ma allontanandosi da esso: ciò è tipico dei sistemi con zeri a fase non minima, ossia con qualche zero a parte reale negativa.

Nella figura seguente è riportato un confronto grafico delle risposte al gradino di tre sistemi del secondo ordine, con gli stessi poli, complessi e coniugati e disposti nel semipiano sinistro, dei quali il primo è privo di zeri, il secondo ha uno zero a fase minima e il terzo presenta uno zero reale positivo.



Analoghe considerazioni sull'effetto di uno zero in un sistema del secondo ordine valgono nel caso di poli reali.

Pertanto la presenza di uno zero aggiuntivo reale negativo (positivo) in un sistema del secondo ordine elementare induce nella risposta indiciiale una sovraelongazione (sottoelongazione) iniziale che è tanto più accentuata quanto più grande è il valore della costante di tempo dello zero (poiché in tal caso l'effetto di tale zero non è evidentemente trascurabile).

Naturalmente nel caso particolare di un sistema con poli reali e uno zero aggiuntivo molto vicino ad uno dei poli, la risposta indiciiale si riduce a quella di un sistema del primo ordine, poiché l'effetto dello zero è semplicemente quello di cancellare uno dei due poli.

EFFETTO DI POLI AGGIUNTIVI: SISTEMI DI ORDINE SUPERIORE AL SECONDO

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, è possibile investigare l'effetto sul comportamento di un sistema elementare del secondo ordine di un polo aggiuntivo reale (negativo, poiché un polo positivo destabilizzerebbe il sistema, rendendone divergente la risposta la gradino).

È così possibile provare che l'effetto principale di un polo aggiuntivo consiste nel rallentamento della risposta al gradino, ovvero l'aumento del tempo di salita, quanto più grande è la costante di tempo di tale polo (poiché in tal caso l'effetto di tale polo non è evidentemente trascurabile).

In definitiva possiamo riassumere alcune interessanti considerazioni sui sistemi di ordine qualsiasi.

1. Coppie di poli/zeri con polo e zero molto vicini fra loro producono un effetto trascurabile sulla risposta. Di fatto tali coppie possono essere cancellate dalla funzione di trasferimento mantenendo invariato il guadagno in continua; in questo modo si riduce l'ordine del modello senza introdurre errori significativi sulla risposta del sistema.
2. Poli e zeri lontani dall'asse immaginario producono un effetto trascurabile sulla risposta. Pertanto, individuati i poli (reali o complessi) più vicini all'asse immaginario (poli dominanti), eventuali altri poli o zeri nettamente più lontani dall'asse immaginario possono essere anch'essi eliminati, senza alterare il guadagno in continua, con buona approssimazione delle risposte del sistema. In pratica sono trascurabili poli e zeri con costanti di tempo superiori di almeno un ordine di grandezza rispetto a quella dei poli dominanti.
3. Poli vicini all'asse immaginario (con costanti di tempo non superiori di un ordine di grandezza rispetto a quella dei poli dominanti) inducono un rallentamento della risposta, ovvero un aumento del tempo di salita, tanto più accentuato quanto più essi sono prossimi all'asse immaginario.

4. Zeri vicini all'asse immaginario (con costanti di tempo non superiori di un ordine di grandezza rispetto a quella dei poli dominanti) inducono sovraelongazioni e/o sottoelongazioni tanto più pronunciate quanto maggiore è la vicinanza all'asse. In particolare uno zero reale positivo induce una sottoelongazione iniziale.

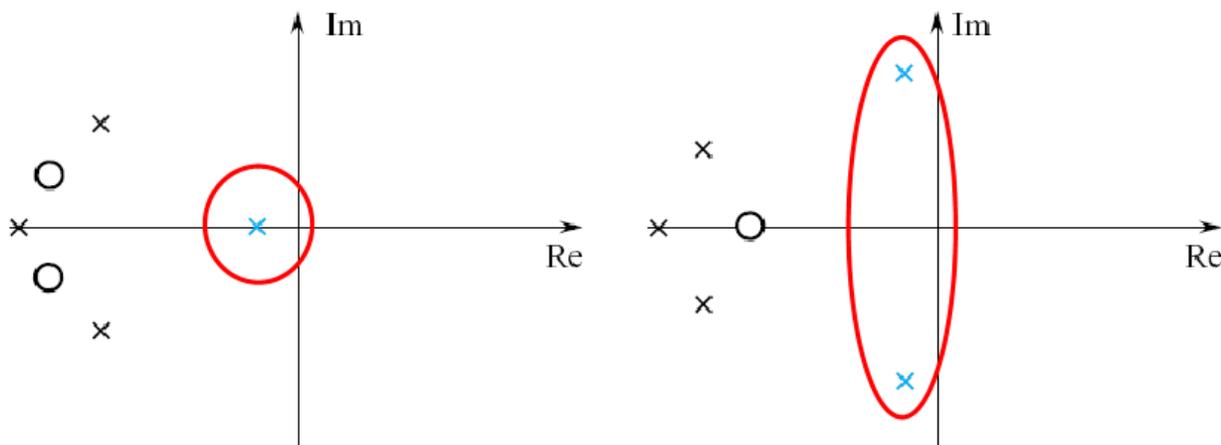
5. Se la funzione di trasferimento del sistema presenta un polo dominante reale molto più vicino all'asse immaginario di tutti gli altri poli e zeri, reali o complessi, il comportamento del sistema è molto simile a quello di un sistema del primo ordine con l'unico polo coincidente con il polo dominante.

6. Se la funzione di trasferimento possiede una coppia di poli dominanti complessi coniugati molto più vicini all'asse immaginario rispetto a tutti gli altri poli e zeri, il comportamento del sistema è molto simile a quello di un sistema del secondo ordine standard.

Si noti che per trascurare un polo p o uno zero z non dominanti nel modello del sistema, è necessario porre la funzione di trasferimento $G(s)$ in forma di costanti di tempo, in modo da non modificarne il guadagno se si trascura il binomio corrispondente a tale polo $1 - \frac{s}{p}$

ovvero allo zero $1 - \frac{s}{z}$, ipotizzandolo simile all'unità.

Nelle figure successive sono riportati due esempi di sistemi di ordine superiore al secondo rispettivamente approssimabili con un polo dominante e con due poli complessi dominanti.



Ad esempio, vedremo che la funzione di trasferimento tra tensione applicata e velocità angolare in un motore elettrico in corrente continua pilotato in eccitazione vale, trascurando il disturbo dovuto alla coppia resistente:

$$G_1(s) = \frac{k_m}{(1 + \tau_m s)(1 + \tau_e s)}.$$

dove τ_m e τ_e sono rispettivamente le costanti di tempo di due poli reali distinti, il primo legato alla componente meccanica del motore, il secondo legato alla componente elettrica dello stesso. Si ha:

$$\tau_m = \frac{J}{f}, \quad \tau_e = \frac{L_e}{R_e}$$

essendo J il momento d'inerzia del motore, f il coefficiente di attrito viscoso, L_e e R_e rispettivamente l'induttanza e la resistenza del circuito di armatura e k_m la costante di guadagno del motore.

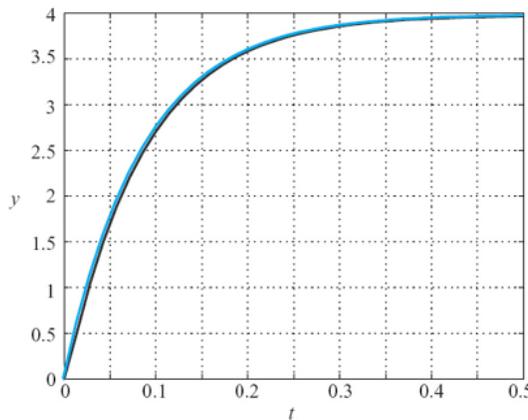
Tipicamente il polo legato alla parte elettrica ha una costante di tempo molto più rapida di quella legata alla parte meccanica, pertanto si trascura, ponendo:

$$G_2(s) = \frac{k_m}{(1 + \tau_m s)}.$$

In figura vediamo le risposte al gradino corrispondenti alle due funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$ con alcuni particolari valori dei parametri, verificando che le risposte sono praticamente sovrapposte.

- Esempio: motore DC con $R=0.46$, $L=1$, $J=0.012$, $B=0.0008$, $k_m=0.25$, funzione di trasferimento tra tensione v e velocità ω

$$G(s) = \frac{3.98}{(1 + 0.0856s)(1 + 0.0022s)} \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{3.98}{1 + 0.0856s}$$

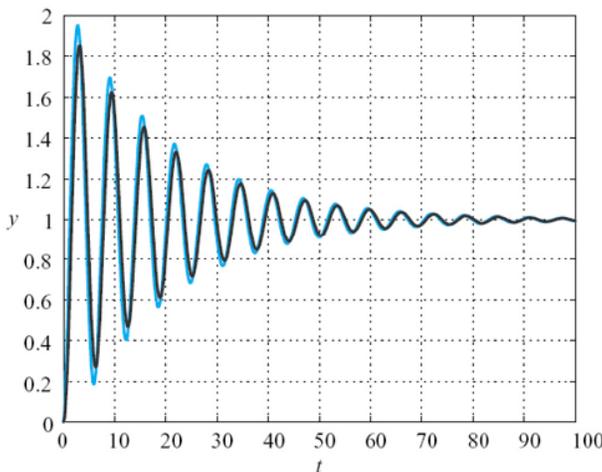


Si è trascurato il polo legato alla parte elettrica (R-L), la cui dinamica è molto più rapida solitamente di quella della parte meccanica (inerzia-attrito)

Vediamo di seguito un altro esempio, in cui un sistema di ordine 5 viene approssimato con uno del secondo ordine.

- Esempio: $G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(1 + 0.02s + 0.002s^2)(1 + 0.1s + s^2)}$

$$\rightarrow \quad G(s) = \frac{1}{1 + 0.1s + s^2}$$



Si sono trascurati i poli con parte reale -5 e il polo reale in -10, conservando solo i poli con parte reale -0.05

Approfondimenti consigliati:

Capitolo 2 ed esercizi del testo G. Marro, Controlli Automatici, Zanichelli, 2004.

Capitoli 4 e 5 del testo A. V. Papadopoulos, M. Prandini, Fondamenti di Automatica. Esercizi, Pearson, 2016.

Capitoli 2, 3 e 4 del testo M. Dotoli, M. P. Fanti, MATLAB – Guida al Laboratorio di Automatica, Città Studi, 2008.