

## MODELLI DEI SISTEMI ELETTROMECCANICI

Nel seguito ci occupiamo della modellazione di sistemi ibridi che combinano sistemi elettrici con sistemi meccanici, ed in particolare dei motori in corrente continua.

L'importanza dei modelli di questi sistemi è dovuta al fatto che questi sono spesso presenti come componenti negli automatismi in cui l'oggetto del controllo sia la movimentazione di un organo meccanico.

## MOTORE ELETTRICO IN CORRENTE CONTINUA

Un classico esempio di sistema elettromeccanico è il motore in corrente continua (c.c.) Si tratta di un dispositivo che trasforma energia elettrica in energia rotazionale attraverso l'interazione tra un campo magnetico stazionario detto campo fisso (generato da un magnete permanente detto circuito di eccitazione o di campo o anche *statore*) e un campo magnetico prodotto da un circuito (detto circuito di armatura o *rotore*) libero di muoversi, che quindi ruota per via dell'interazione tra i due campi magnetici.

L'energia rotazionale prodotta permette di muovere un carico solidale all'asse del motore, per cui questo è spesso chiamato *attuatore*. Un altro appellativo comune è quello di *servomeccanismo di posizione (di velocità)* poiché la sua uscita è la posizione angolare (la velocità angolare).

Oltre alla rotazione dell'albero motore dovuta all'accoppiamento dei due campi magnetici fisso e in rotazione, un motore in c.c. è interessato da un altro fenomeno fisico: il conduttore che si muove nel campo magnetico permanente genera ai suoi capi una tensione indotta detta forza elettromotrice.

Nella scrittura delle equazioni che descrivono il motore in c.c. si trascurano gli effetti di secondo ordine quali l'isteresi e la caduta di tensione tra le spazzole (attrito di Coulomb).

In un servomeccanismo si identificano in genere tre variabili di ingresso principali: la *tensione applicata al circuito di eccitazione* (oppure la corrente), la *tensione applicata al circuito di armatura* (o la corrente) e la *coppia di carico* (ingresso non manipolabile). Generalmente i servomotori sono pilotati mantenendo costante una delle due variabili manipolabili ed agendo sull'altra come unico ingresso (manipolabile). Fissando ad esempio la tensione (e quindi la corrente) di armatura il servomeccanismo si dice *pilotato in eccitazione*; viceversa, se si fissa la tensione (e quindi la corrente) di eccitazione il servomeccanismo si dice *pilotato in armatura*.

Per un motore in corrente continua comunque pilotato valgono le seguenti leggi.

1) La coppia motrice vale:

$$C_m(t) = k_m \varphi(t) i_a(t)$$

essendo  $k_m$  una costante costruttiva del motore,  $\varphi$  il flusso di eccitazione e  $i_a$  la corrente di armatura.

2) Il flusso di eccitazione dipende generalmente in modo non lineare dalla corrente di eccitazione, ma in prima approssimazione si può affermare che tale relazione sia di proporzionalità diretta (ossia sia lineare):

$$\varphi(t) = k i_e(t)$$

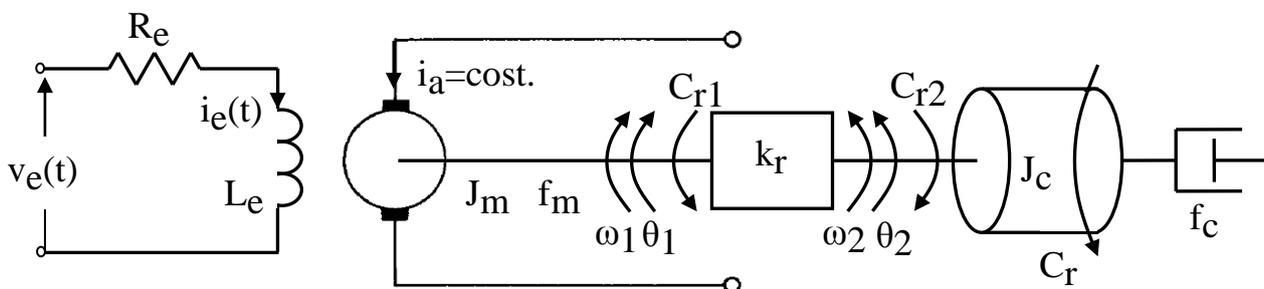
essendo  $k$  una costante caratteristica del motore e  $i_e$  la corrente di eccitazione.

3) La forza elettromotrice (f.e.m.) o tensione misurata ai capi del rotore vale:

$$e(t) = k_m \varphi(t) \omega_m(t) = k_m \varphi(t) \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

essendo  $k_m$  la costante costruttiva già introdotta al punto 1 (anche se dimensionalmente si tratta di due parametri differenti) e  $\theta_m$  e  $\omega_m$  rispettivamente la posizione angolare e la velocità angolare del motore.

### MODELLO DI UN MOTORE IN C.C. PILOTATO IN ECCITAZIONE



Nel seguito si vuole determinare un modello matematico del sistema in figura, costituito da un motore in corrente continua alimentato con corrente di armatura costante e pilotato dalla tensione  $v_e$  applicata al circuito di eccitazione.

Il rotore del motore possiede un momento di inerzia  $J_m$  e un coefficiente di attrito viscoso  $f_m$ . Inoltre l'albero del motore sia collegato ad un riduttore di giri  $k_r$ . A sua volta il riduttore trascina un carico che ha momento di inerzia  $J_c$  e coefficiente di attrito viscoso  $f_c$ . È presente una coppia resistente  $C_r$  che agisce come disturbo del sistema. Si vuole descrivere la variabile di uscita, costituita dalla posizione angolare  $\theta_2$  dell'albero motore su cui è calettato il carico.

Identifichiamo innanzitutto le variabili di ingresso. Naturalmente una di esse è la tensione applicata al circuito di eccitazione del motore  $v_e$ . Un'altra variabile indipendente che influenza la dinamica del sistema è la coppia resistente  $C_r$ . Perciò il nostro sistema possiede due ingressi (di cui uno è una variabile manipolabile e l'altro è un disturbo) e un'unica uscita  $\theta_2$ .

Esaminiamo ora in dettaglio le relazioni che legano le variabili del sistema.

Per il circuito di eccitazione si ha la legge di Kirchoff delle tensioni:

$$v_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e(t)}{dt}.$$

Scriviamo poi l'equilibrio meccanico all'albero motore, sapendo che la coppia motrice sviluppata dal motore è proporzionale al flusso di eccitazione e alla corrente di armatura:

$$C_m(t) = k_m \varphi(t) i_a(t).$$

Il flusso dipende dalla corrente di eccitazione. Supponendo tale dipendenza di diretta proporzionalità (ipotesi valida se il motore è lontano dalla saturazione) e ricordando che la corrente di armatura è costante, si ha in definitiva:

$$C_m(t) = k'_m i_e(t).$$

Le coppie resistenti all'albero del motore sono la coppia di inerzia, la coppia di attrito e la coppia resistente riportata a monte del riduttore.

Ne consegue che l'equilibrio meccanico all'albero motore si scrive come segue:

$$k'_m i_e(t) = J_m \frac{d\omega_1(t)}{dt} + f_m \omega_1(t) + C_{r1}(t).$$

Esaminiamo ora il riduttore, la cui equazione è:

$$\theta_2(t) = k_r \theta_1(t),$$

ossia

$$\omega_2(t) = k_r \omega_1(t)$$

con  $k_r < 1$  (trattandosi di un riduttore). Inoltre l'equilibrio delle coppie all'ingranaggio si scrive:

$$C_{r2}(t) = \frac{C_{r1}(t)}{k_r}.$$

Ancora, è possibile scrivere l'equilibrio meccanico al carico considerando che la coppia  $C_{r2}$  è pari alla somma della coppia di inerzia del carico, della coppia di attrito e della coppia resistente esterna  $C_r$  (si tratta di una coppia resistente non controllabile e quindi interpretabile come un disturbo):

$$C_{r2}(t) = J_c \frac{d\omega_2(t)}{dt} + f_c \omega_2(t) + C_r(t).$$

Le diverse equazioni di equilibrio delle coppie possono essere trasformate in un'unica relazione. In particolare, sostituendo quest'ultima relazione all'equilibrio delle coppie all'albero motore e tenendo conto dell'equazione dell'ingranaggio si ha:

$$k'_m i_e(t) = J_m \frac{d\omega_1(t)}{dt} + f_m \omega_1(t) + k_r \left( J_c \frac{d\omega_2(t)}{dt} + f_c \omega_2(t) + C_r(t) \right)$$

e tenendo conto della relazione sulle velocità angolari si ha:

$$k'_m i_e(t) = (J_m + k_r^2 J_c) \frac{d\omega_1(t)}{dt} + (f_m + k_r^2 f_c) \omega_1(t) + k_r C_r(t).$$

Posto ora

$$J = J_m + k_r^2 J_c, \quad f = f_m + k_r^2 f_c$$

si ottiene:

$$k'_m i_e(t) = J \frac{d\omega_1(t)}{dt} + f\omega_1(t) + k_r C_r(t)$$

che come è noto esprime l'inerzia e l'attrito complessivi riportati all'albero del motore, a monte del riduttore.

Trasformando secondo Laplace l'equilibrio elettrico relativo al circuito di eccitazione e l'equilibrio meccanico all'albero motore si hanno le due equazioni:

$$V_e(s) = (R_e + L_e s) I_e(s)$$

e

$$k'_m I_e(s) = (Js + f)\Omega_1(s) + k_r C_r(s).$$

Ricaviamo dall'ultima equazione la trasformata di Laplace della velocità angolare del motore e sostituiamo quindi la trasformata di Laplace dell'ingresso  $V_e$ :

$$\Omega_1(s) = \frac{k'_m}{(Js + f)} I_e(s) - \frac{k_r}{(Js + f)} C_r(s),$$

$$\Omega_1(s) = \frac{k'_m}{(Js + f)(L_e s + R_e)} V_e(s) - \frac{k_r}{(Js + f)} C_r(s).$$

Ricordando poi che la posizione angolare è l'integrale della velocità angolare, ossia, nel dominio della frequenza complessa s:

$$\Theta_1 = \frac{\Omega_1}{s}$$

e che per la presenza del riduttore si ha:

$$\Theta_2 = k_r \Theta_1$$

si deduce che la trasformata dell'uscita vale

$$\Theta_2(s) = \frac{k_r k'_m}{s(Js + f)(L_e s + R_e)} V_e(s) - \frac{k_r^2}{s(Js + f)} C_r(s).$$

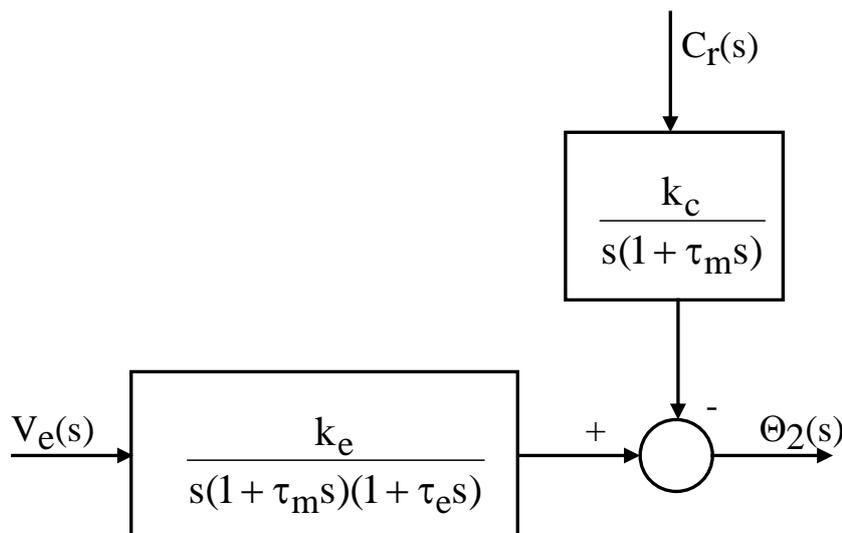
Poniamo ora

$$\tau_m = \frac{J}{f}, \quad \tau_e = \frac{L_e}{R_e}, \quad k_e = \frac{k_r k'_m}{f R_e}, \quad k_c = \frac{k_r^2}{f}.$$

Si ottiene quindi

$$\Theta_2(s) = \frac{k_e}{s(1 + \tau_m s)(1 + \tau_e s)} V_e(s) - \frac{k_c}{s(1 + \tau_m s)} C_r(s).$$

La precedente espressione descrive la relazione tra i due ingressi e l'uscita nel dominio della frequenza complessa  $s$ . Si osserva che la funzione di trasferimento relativa all'ingresso in tensione comprende un polo nell'origine, dovuto alla scelta come uscita della posizione angolare, un polo meccanico che dipende dalle caratteristiche costruttive del motore e dal carico, e un polo elettrico che dipende dal circuito di eccitazione. Invece la funzione di trasferimento relativa al disturbo (la coppia resistente) comprende un polo nell'origine, dovuto alla scelta come uscita della posizione angolare, e il polo meccanico dovuto al motore e al carico.



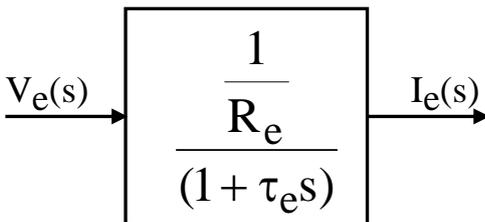
Il diagramma a blocchi equivalente del sistema è rappresentato nella figura precedente.

Si osserva che le due funzioni di trasferimento avrebbero potuto essere dedotte una alla volta, considerando singolarmente i due ingressi e applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, valido per l'ipotesi di linearità dei sistemi.

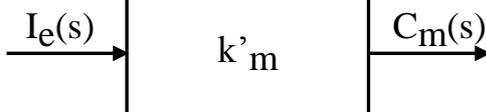
Un modo alternativo per determinare le due funzioni di trasferimento viste è quello di descrivere le diverse relazioni del sistema mediante uno schema a blocchi, in cui ciascun blocco esprime una delle relazioni viste in precedenza. Applicando quindi l'algebra dei sistemi a blocchi è possibile pervenire ad un sistema minimo come quello della figura precedente.

Riesaminiamo in tal senso le relazioni già scritte, operando direttamente con la trasformata di Laplace, e introducendo i corrispondenti blocchi.

Per il circuito di eccitazione si ha il seguente blocco.

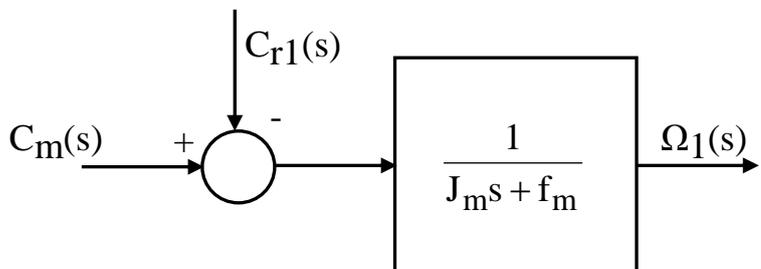
$$I_e(s) = \frac{1}{R_e(1 + \tau_e s)} V_e(s)$$


Per l'equilibrio meccanico all'albero del motore si ha il blocco che segue.

$$C_m(s) = k'_m I_e(s)$$


Passiamo ora ad esaminare la relazione tra coppia motrice e coppia resistente all'albero motore.

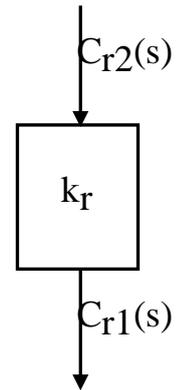
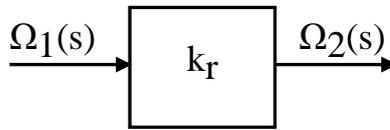
$$C_m(s) = (J_m s + f_m) \Omega_1(s) + C_{r1}(s)$$

$$\Omega_1(s) = \frac{C_m(s) - C_{r1}(s)}{(J_m s + f_m)}$$


Vediamo ora il riduttore, che fornisce due equazioni e due corrispondenti schemi a blocchi.

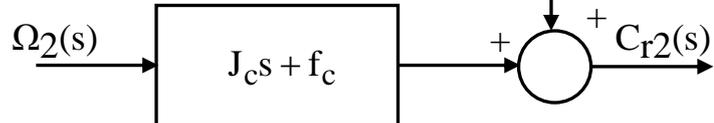
$$\Omega_2(s) = k_r \Omega_1(s),$$

$$C_{r1}(s) = k_r C_{r2}(s).$$



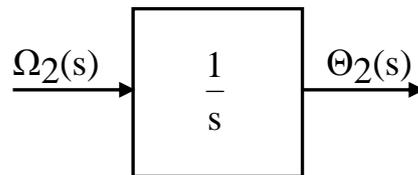
Esaminiamo poi l'equilibrio all'albero del carico.

$$C_{r2}(s) = (J_c s + f_c) \Omega_2(s) + C_r(s).$$

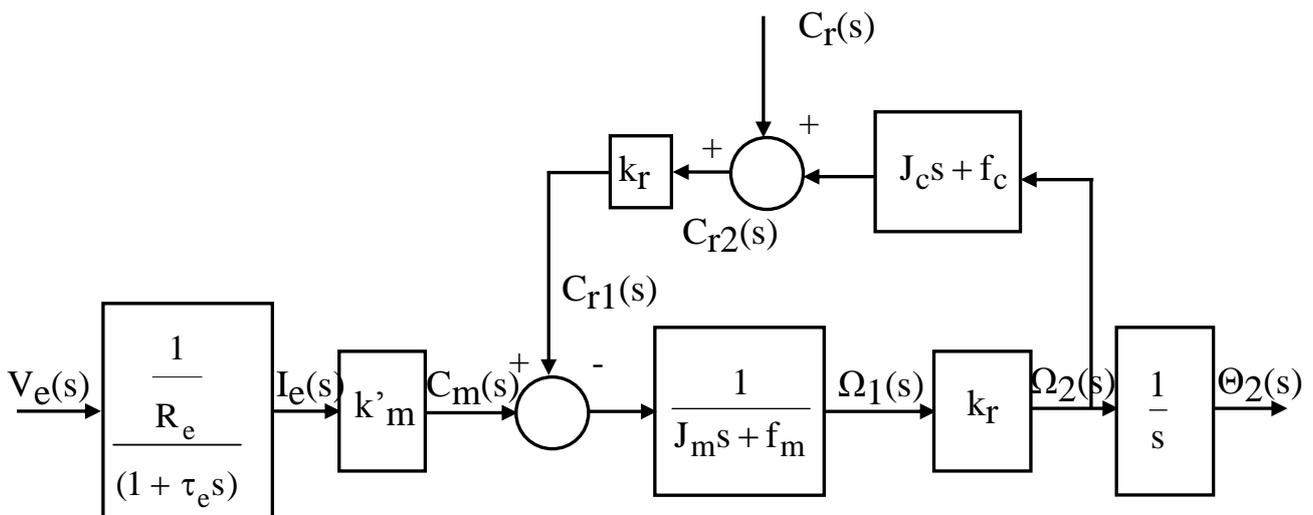


Scriviamo poi il legame di integrazione esistente tra la velocità angolare e la posizione angolare all'albero del carico:

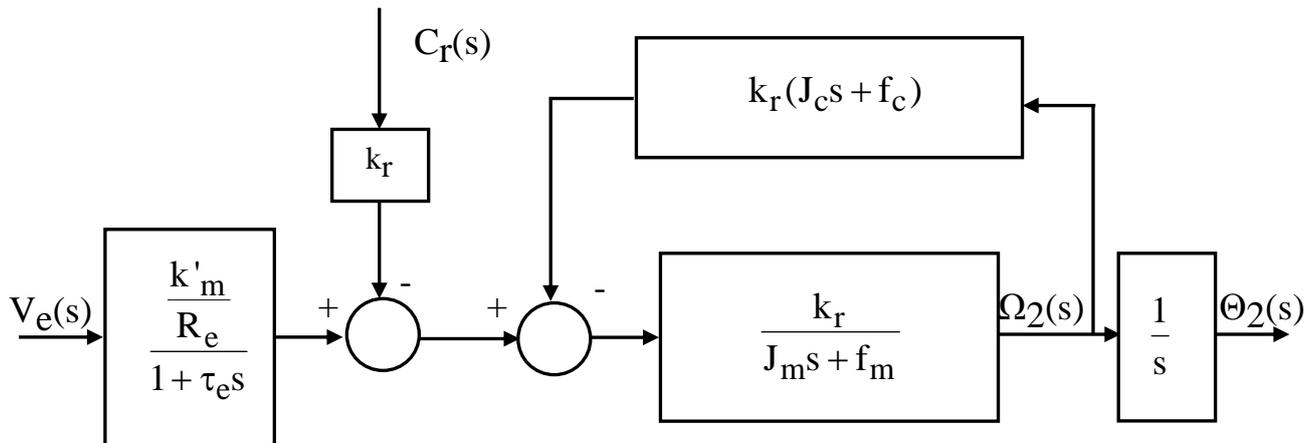
$$\Theta_2(s) = \frac{\Omega_2(s)}{s}.$$



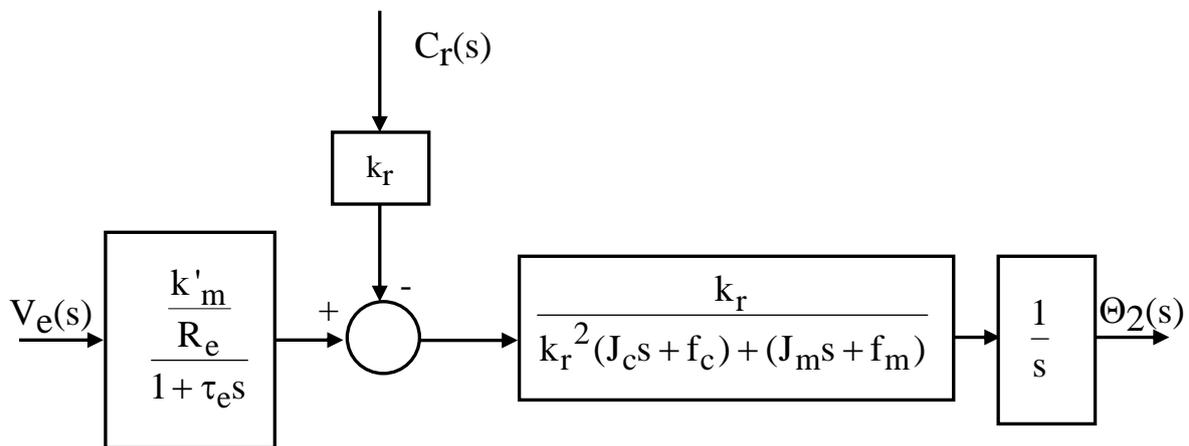
Aggreghiamo quindi tutti i blocchi.



Portiamo la seconda giunzione sommatrice a monte della prima e effettuiamo la serie tra due blocchi.



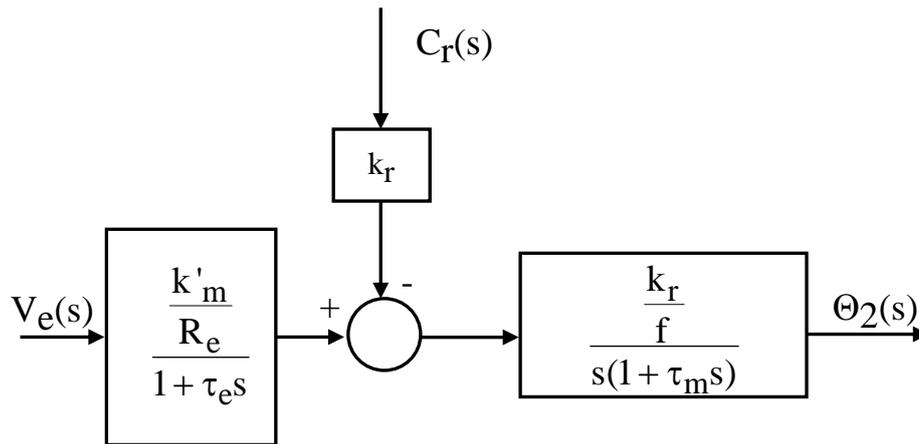
Risolviamo ora l'anello di retroazione.



Poniamo come prima:

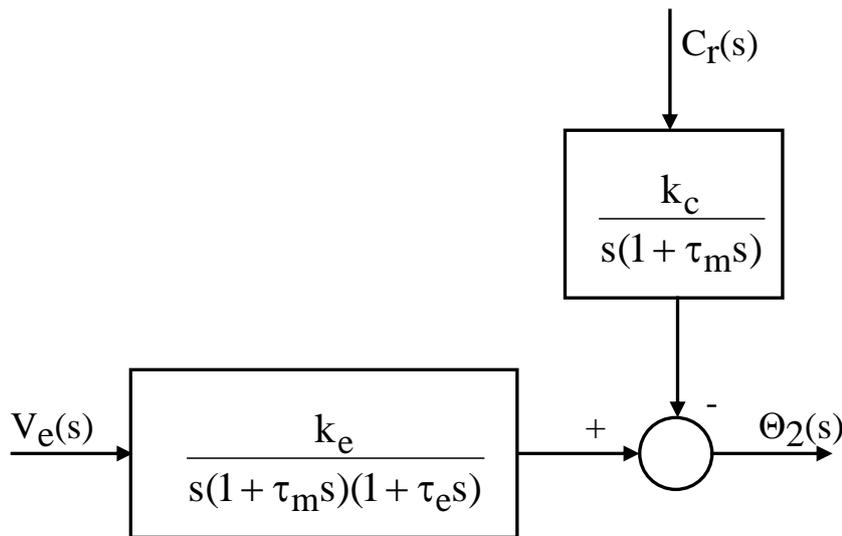
$$J = J_m + k_r^2 J_c, \quad f = f_m + k_r^2 f_c, \quad \tau_m = \frac{J}{f}.$$

Si ottiene:



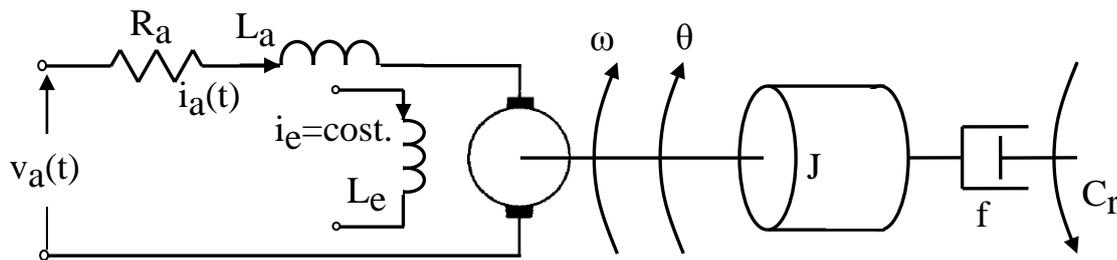
Infine, portando a valle la giunzione sommante si ottiene il diagramma a blocchi riportato di seguito, dopo aver posto:

$$k_e = \frac{k_r k'_m}{f R_e}, \quad k_c = \frac{k_r^2}{f}.$$



Evidentemente si ottiene lo stesso risultato ottenuto con il primo metodo.

## MODELLO DI UN MOTORE IN C.C. PILOTATO IN ARMATURA



Determiniamo ora il modello matematico del motore in corrente continua alimentato con corrente di eccitazione costante e pilotato dalla tensione  $v_a$  applicata al circuito di armatura.

Consideriamo direttamente un momento di inerzia  $J$  e un coefficiente di attrito viscoso  $f$  ridotti all'albero motore, dunque comprensivi del carico, eventualmente collegato con un riduttore, e del motore stesso. Inoltre sia  $C_r$  la coppia resistente riportata all'albero motore che agisce come disturbo del sistema. Si vuole descrivere la variabile di uscita, costituita dalla posizione angolare  $\theta$  dell'albero motore.

Le variabili di ingresso sono in questo caso la tensione applicata al circuito di armatura del motore  $v_a$  e la coppia resistente  $C_r$ . Perciò il nostro sistema possiede due ingressi (di cui uno è una variabile manipolabile e l'altro è un disturbo) e un'unica uscita  $\theta$ .

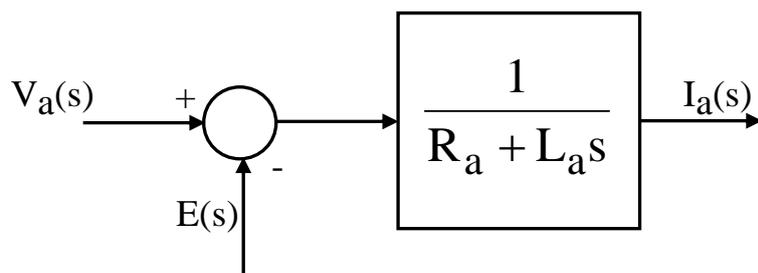
Costruiamo il modello matematico.

Per il circuito di armatura si ha il seguente blocco.

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e(t)$$

essendo  $e(t)$  la forza elettromotrice misurata ai morsetti del rotore. Trasformando secondo Laplace con condizioni iniziali nulle si ha:

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - E(s)}{(R_a + L_a s)}$$

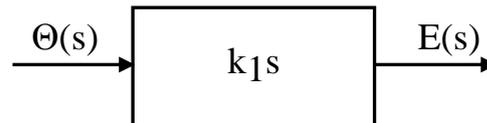


D'altra parte per la forza elettromotrice si ha, tenuto conto che il flusso è costante (essendo costante la corrente di eccitazione):

$$e(t) = k_m \varphi(t) \omega_m(t) = k_m \varphi(t) \frac{d\theta(t)}{dt} = k_1 \frac{d\theta(t)}{dt}$$

che trasformata secondo Laplace diventa

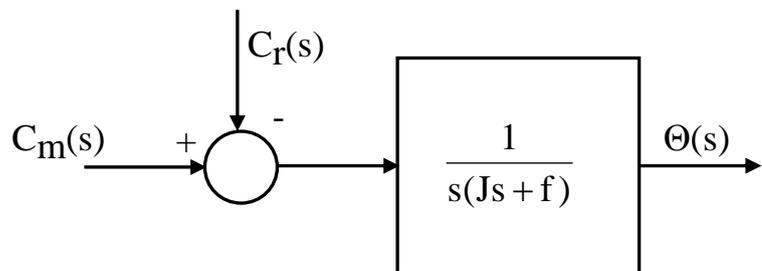
$$E(s) = k_1 s \Theta(s)$$



Passiamo ora ad esaminare la relazione tra coppia motrice e coppia resistente all'albero motore.

$$C_m(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + f \frac{d\theta(t)}{dt} + C_r(t)$$

che trasformata secondo Laplace fornisce



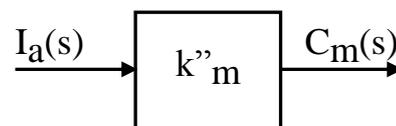
$$\Theta(s) = \frac{C_m(s) - C_r(s)}{s(Js + f)}$$

Inoltre sappiamo che la coppia motrice è data dalla relazione, tenuto conto che il flusso è costante:

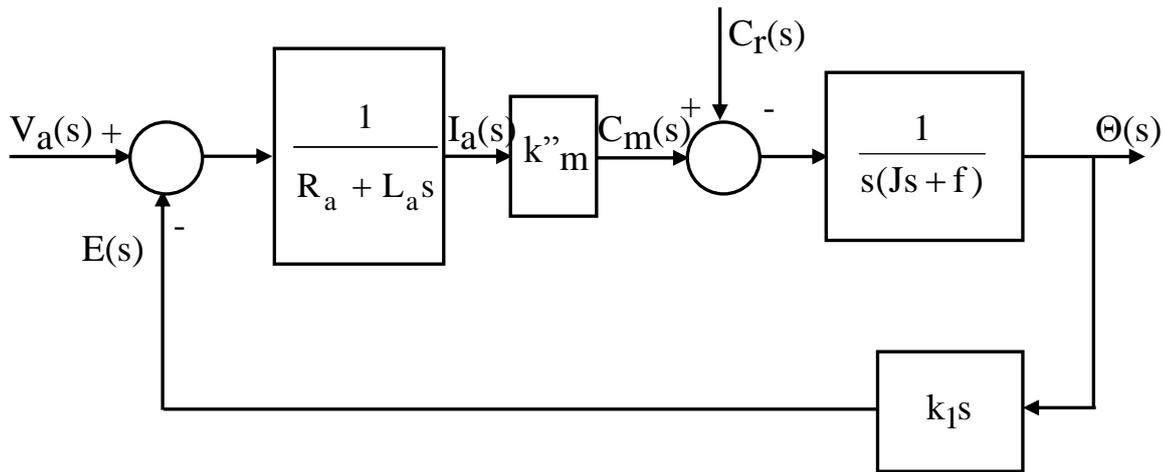
$$C_m(t) = k_m \varphi(t) i_a(t) = k''_m i_a(t),$$

che trasformata secondo Laplace diventa

$$C_m(s) = k''_m I_a(s).$$

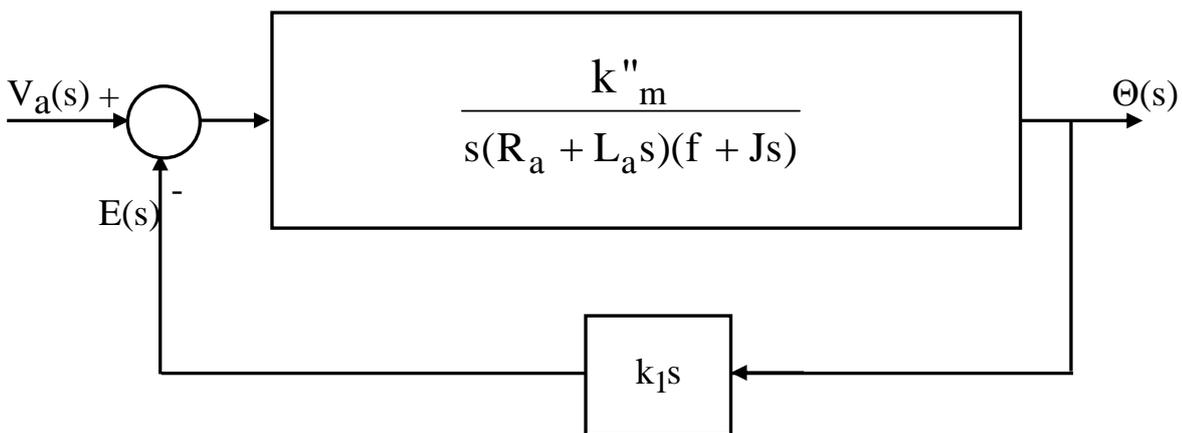


Aggreghiamo quindi tutti i blocchi.

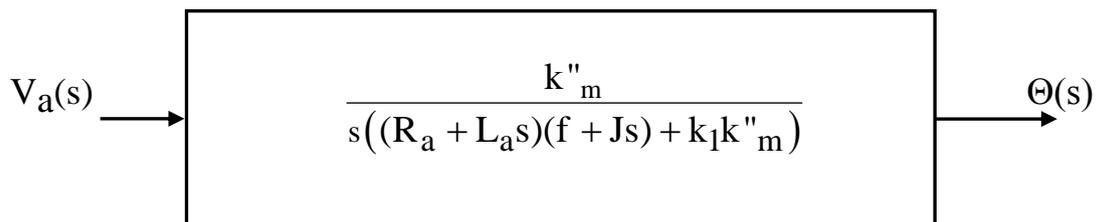


Per ridurre lo schema applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti.

Consideriamo prima il disturbo  $C_r=0$ . Lo schema equivalente è il seguente.



Da cui si ottiene la funzione di trasferimento in assenza del disturbo.



Normalmente l'induttanza del circuito di armatura è molto bassa e dunque trascurabile. Perciò, posto  $L_a=0$  nella precedente funzione di trasferimento, si ha:

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$G_1(s) = \left. \frac{\Theta(s)}{V_a(s)} \right|_{C_r=0} \simeq \frac{k''_m}{s(R_a(f + Js) + k_1 k''_m)}$$

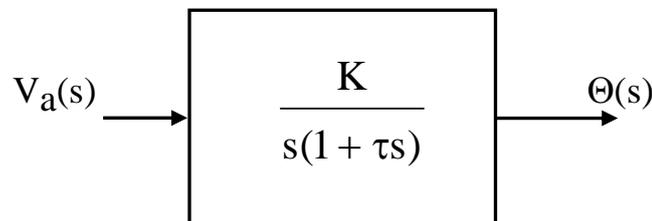
$$= \frac{k''_m}{s(R_a Js + (R_a f + k_1 k''_m))} = \frac{\frac{k''_m}{R_a f + k_1 k''_m}}{s \left( 1 + \frac{R_a J}{R_a f + k_1 k''_m} s \right)} = \frac{K}{s(1 + \tau s)}$$

con

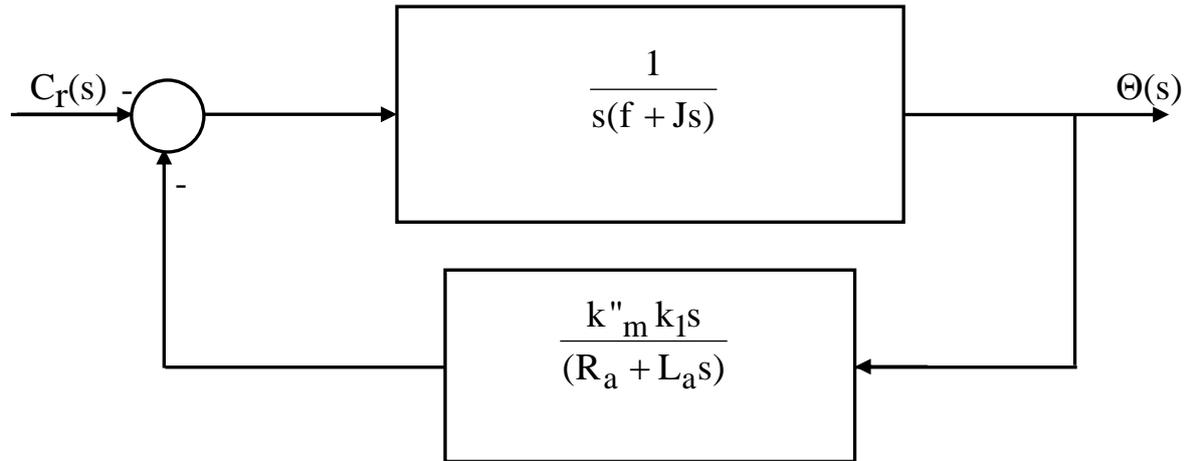
$$K = \frac{k''_m}{R_a f + k_1 k''_m};$$

$$\tau = \frac{R_a J}{R_a f + k_1 k''_m}.$$

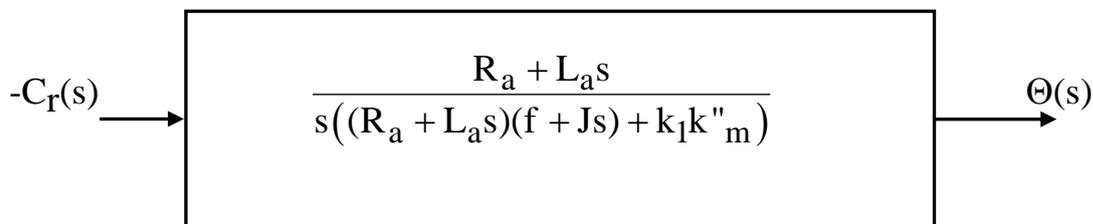
In definitiva si ha un polo nell'origine dovuto alla scelta dell'uscita di posizione e un polo reale negativo dovuto al motore e al carico, oltre che al circuito di armatura (è presente l'influenza della resistenza  $R_a$ ). Il polo elettrico reale negativo dovuto all'induttanza di armatura viene trascurato.



Consideriamo ora la tensione  $V_a(s)=0$ . Lo schema equivalente è il seguente.



Da cui si ottiene la funzione di trasferimento relativa al solo disturbo.



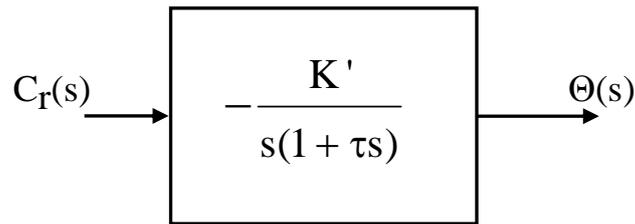
Con le stesse posizioni di prima, e in particolare con  $L_a=0$ , si ha quindi:

$$\begin{aligned}
 G_2(s) &= \left. \frac{\Theta(s)}{C_r(s)} \right|_{V_a=0} \simeq -\frac{R_a}{s(R_a(f + Js) + k_1 k''_m)} \\
 &= -\frac{R_a}{s(R_a J s + (R_a f + k_1 k''_m))} = -\frac{\frac{R_a}{R_a f + k_1 k''_m}}{s \left( 1 + \frac{R_a J}{R_a f + k_1 k''_m} s \right)} = -\frac{K'}{s(1 + \tau s)}
 \end{aligned}$$

con

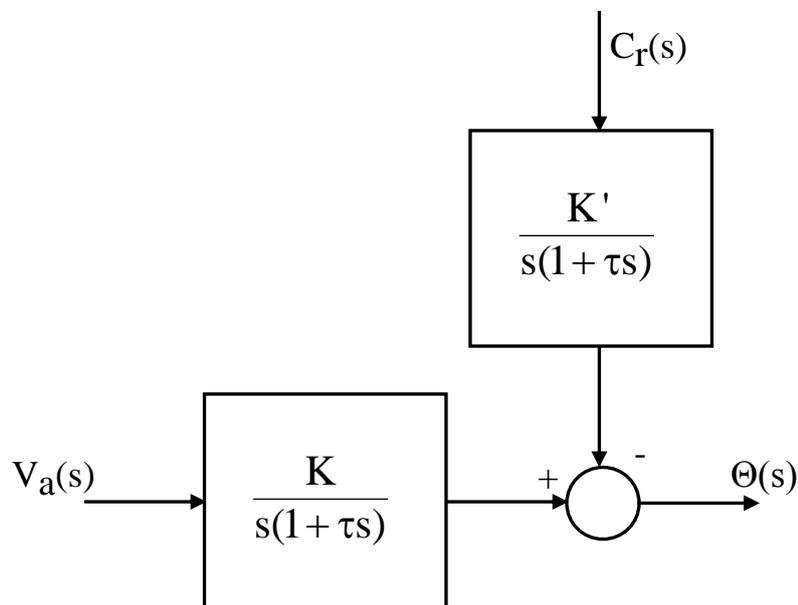
$$\begin{aligned}
 K' &= \frac{R_a}{R_a f + k_1 k''_m} = \frac{\tau}{J}; \\
 \tau &= \frac{R_a J}{R_a f + k_1 k''_m}.
 \end{aligned}$$

Il blocco equivalente è dunque:



con gli stessi poli della funzione di trasferimento ottenuta per disturbo nullo.

Nel complesso si ha il seguente schema a blocchi, che comprende due funzioni di trasferimento uguali a meno di un fattore moltiplicativo.



**Approfondimenti consigliati:**

**Capitolo 10 ed esercizi del testo G. Marro, Controlli Automatici, Zanichelli, 2004.**

**Capitolo 5 del testo M. Dotoli, M. P. Fanti, MATLAB – Guida al Laboratorio di Automatica, Città Studi, 2008.**