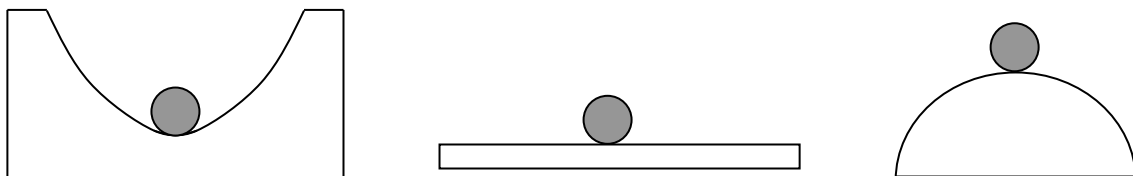


STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI

Quando un sistema fisico inizialmente in quiete è sollecitato con un ingresso di durata finita o di ampiezza limitata, l'uscita del sistema dovrebbe stabilizzarsi a un certo valore (non importa quanto grande) e non continuare ad aumentare indefinitamente, poiché l'energia di un sistema reale non può essere infinita.

Un classico esempio è quello della verifica delle sospensioni di un'automobile. Per controllarne il funzionamento, in genere il meccanico applica una forza singola e improvvisa verso il basso (in pratica un impulso) sull'angolo della carrozzeria dell'automobile. Tale ingresso impulsivo eccita le sospensioni provocando piccole oscillazioni. In una autovettura su cui sono montate sospensioni funzionanti correttamente, le oscillazioni si estinguono velocemente e la carrozzeria dell'automobile si ferma (la risposta all'impulso si annulla). Se le sospensioni non funzionano correttamente, è invece necessario un tempo molto lungo perché le oscillazioni si estinguano. Quando un'automobile siffatta viene utilizzata su una strada sterrata o su un terreno con dossi, è possibile che le oscillazioni continuino a crescere, portando alla rottura delle sospensioni.

Pertanto la stabilità è una caratteristica molto importante di un generico sistema di controllo: un sistema di controllo in anello chiuso instabile non è progettato correttamente, poiché il suo funzionamento porta al danneggiamento di alcune apparecchiature. In definitiva, un sistema di controllo deve essere di natura stabile per poter risultare di uso pratico.



IL CONCETTO DI STABILITÀ

Illustriamo meglio il concetto di stabilità tramite il classico esempio di una sfera in equilibrio su una superficie in una posizione iniziale che per convenzione è posta pari a zero. Nel primo caso (si vedano le figure precedenti) si assume che la superficie sia concava, nel secondo caso che sia piana, nel terzo che sia convessa.

L'analisi della stabilità in questo esempio prevede di dare una leggera spinta alla sfera e osservare il suo movimento in ciascuna delle tre situazioni.

Nel caso della superficie concava, a seguito della spinta la sfera oscilla in avanti e indietro, ma l'attrito causa il rallentamento della sfera, che prima o poi si ferma nel punto in cui si trovava inizialmente. Un ingresso (forza) finito risulta in un movimento finito con una posizione che converge a zero (la sfera si ferma). Il punto di equilibrio del sistema si dice *asintoticamente stabile*.

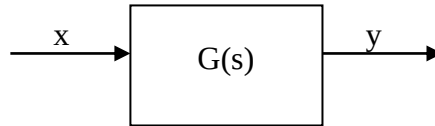
Se la superficie è piana, in risposta alla spinta ricevuta la sfera comincia a rotolare sulla superficie piana e in seguito per l'attrito si ferma in un nuovo punto, cosicché la posizione rimane costante da quell'istante di tempo in poi. Un ingresso (forza) finito risulta in una posizione limitata che non converge a zero. Il punto di equilibrio del sistema si dice *semplicemente o marginalmente stabile*. Peraltro, se la superficie è leggermente inclinata o sviluppa una curvatura leggermente convessa, la sfera continua a rotolare, non fermandosi mai.

Nel caso di superficie convessa, infine, successivamente all'applicazione della forza la sfera rotola verso il basso sulla superficie, continuando a mantenere una velocità non nulla, con una posizione che tende a divergere. Nel caso di superficie che si estende all'infinito, ad una forza in ingresso finita corrisponde una posizione divergente. Il punto di equilibrio del sistema si dice *instabile*.

Riassumendo, nel primo caso il sistema, che si trova in una condizione iniziale di quiete, viene sottoposto ad una perturbazione di durata limitata, cui risponde riportandosi nel punto iniziale di equilibrio (*equilibrio asintoticamente stabile*). Nel secondo caso, invece, a seguito di una perturbazione di durata limitata il sistema si porta in una nuova situazione di equilibrio diversa da quella iniziale (*equilibrio indifferente o marginalmente stabile*). Infine, nel terzo caso il sistema, anche se la perturbazione ha durata infinitesima, anziché raggiungere una condizione di equilibrio dopo l'estinguersi di tale perturbazione, continua ad evolvere nel tempo, fornendo una risposta divergente: la velocità della sfera cresce indefinitamente (*equilibrio instabile*).

DEFINIZIONI E TEOREMI RELATIVI ALLA STABILITÀ

Consideriamo il sistema SISO lineare tempoinvariante in figura, descritto dalla equazione differenziale:



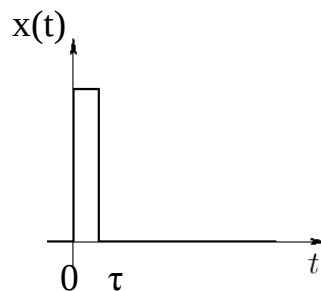
$$\begin{aligned}
 a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\
 = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)
 \end{aligned}$$

Supponiamo che il sistema sia in una condizione di quiete o di equilibrio all'istante iniziale $t=0$. Ciò significa che inizialmente l'ingresso e l'uscita sono nulle o non nulle ma costanti, ossia il sistema è descritto dall'equazione (ottenuta dalla precedente annullando tutte le derivate):

$$a_0 y(t)|_{t=0} = b_0 x(t)|_{t=0}.$$

Si osserva che quest'ultimo caso è analogo alla situazione in cui si assume $x=y=0$ in $t=0$, poiché dall'equazione precedente ci si può ricondurre a tale condizione semplicemente operando un opportuno cambiamento delle origini del riferimento delle variabili.

Si osserva inoltre che, nel caso di sistemi tempoinvarianti, come per il sistema espresso dall'equazione differenziale precedente, gli esperimenti sono ripetibili, dunque studiare la stabilità del sistema con perturbazioni in $t=0$ è equivalente ad effettuare lo studio di stabilità a partire dall'istante $t=t_0$.



Supponiamo dunque che il sistema, inizialmente in quiete, venga perturbato con un segnale di durata limitata, ovvero applicando un segnale di ingresso diverso da zero per un intervallo di tempo limitato τ , come ad esempio quello rappresentato in figura ed espresso come segue:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0, t > \tau \\ \text{qualsiasi} & \text{per } 0 \leq t \leq \tau \end{cases}$$

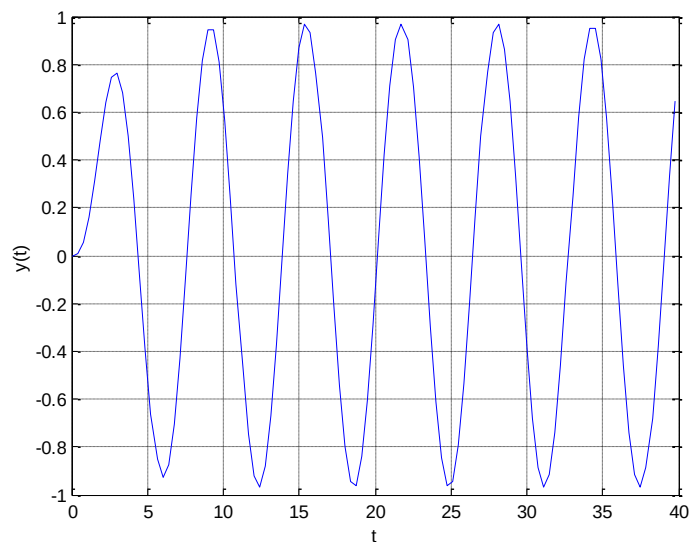
Si osservi che si richiede unicamente che la perturbazione sia di durata limitata, mentre nulla è richiesto sulla sua ampiezza nell'intervallo $[0, \tau]$, nel quale la funzione $x(t)$ può anche presentare ampiezza divergente (si pensi al caso dell'impulso di Dirac o dei segnali impulsivi di ordine superiore).

La risposta a tale perturbazione può essere di tre tipi diversi.

1) Risposta limitata: esiste una costante M_y positiva tale che sia:

$$|y(t)| \leq M_y \text{ per ogni } t \geq 0.$$

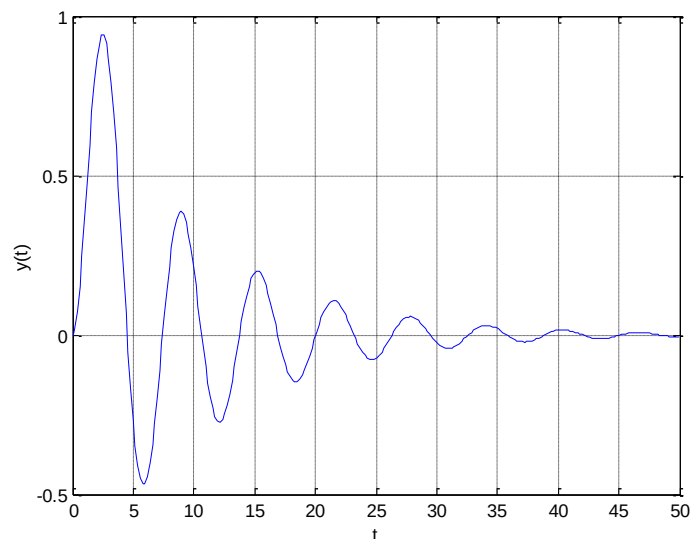
Il sistema si dice in tal caso *semplicemente stabile*.



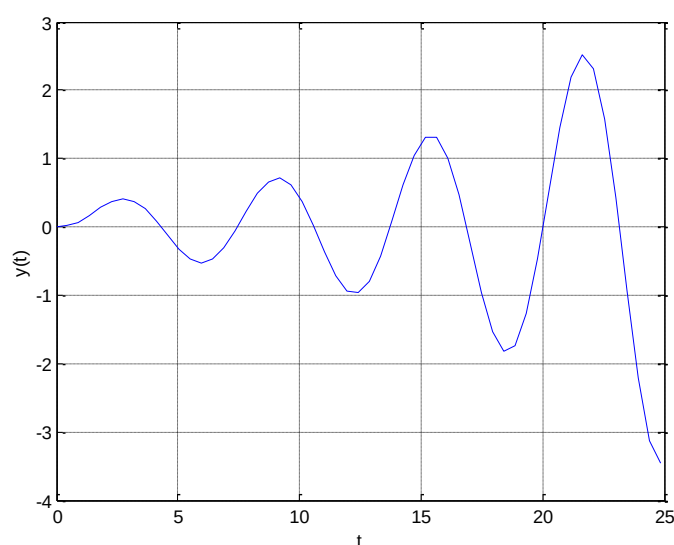
- 2) Risposta convergente asintoticamente a zero: esiste una costante M_y positiva tale che sia:

$$|y(t)| \leq M_y \quad \forall t \geq 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| = 0.$$

Il sistema si dice *asintoticamente stabile*.



- 3) Risposta divergente: non esiste alcuna costante M_y positiva tale che l'ampiezza della risposta diventi limitata a partire da un certo istante di tempo. Essa cresce e diviene di ampiezza infinita oppure oscilla con ampiezza che cresce indefinitamente. Il sistema si dice *instabile*.



PROPRIETÀ DI STABILITÀ DEI SISTEMI SISO LINEARI E STAZIONARI

In un sistema lineare la tipologia della risposta a una perturbazione di durata finita (limitata, convergente asintoticamente a zero o divergente) non dipende dalla condizione iniziale né dall'entità della perturbazione applicata, ciò per una conseguenza del principio di sovrapposizione degli effetti. Inoltre in un sistema lineare l'analisi di stabilità fatta per un punto di equilibrio vale per ogni eventuale altro punto di equilibrio del sistema: in altre parole, tutti i punti di equilibrio del sistema hanno le stesse caratteristiche di stabilità.

Invece in un sistema non lineare l'analisi di stabilità va fatta per ogni diverso punto di equilibrio e al variare della perturbazione applicata: generalmente, infatti, tale analisi fornisce risultati differenti a seconda delle perturbazioni e dei punti di equilibrio considerati.

Un generico sistema lineare, quindi, è asintoticamente stabile, oppure semplicemente stabile o instabile, a seconda che la sua risposta a una *qualunque* perturbazione di durata finita abbia un andamento del tipo visto nelle figure precedenti.

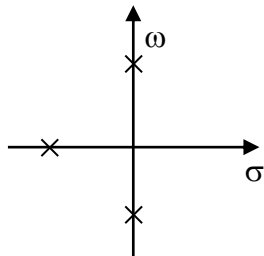
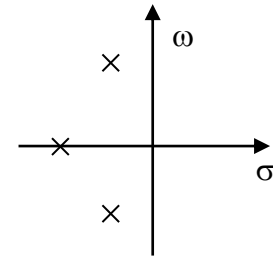
Abbiamo visto che un generico sistema SISO lineare tempoinvariante inizialmente in condizioni iniziali nulle produce una risposta (forzata) ad un ingresso $x(t)$ che comprende i modi della risposta stessa e quelli associati ai poli della funzione di trasferimento $G(s)$.

Poiché la perturbazione considerata è qualsiasi e di durata finita, essa è costituita da funzioni elementari o modi che convergono tutti a zero. Dunque il fatto che la risposta del sistema sia convergente, limitata o divergente, non dipende dai modi dell'ingresso presenti in tale risposta, che convergono tutti a zero, ma dipende unicamente da come sono fatti i modi e quindi i poli del sistema.

Abbiamo visto che, perché tutti i modi del sistema siano convergenti è necessario che i poli siano tutti disposti nel semipiano sinistro di Gauss. Inoltre, a poli semplici posti sull'asse immaginario corrispondono modi (oscillatori o costanti) che sono limitati. Infine, a poli multipli sull'asse immaginario e a poli posti nel semipiano destro di Gauss corrispondono modi divergenti.

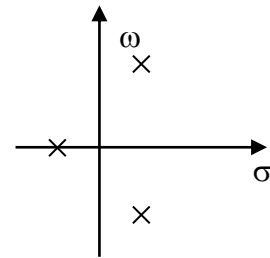
Si deducono dunque le seguenti proprietà.

Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema SISO lineare stazionario sia asintoticamente stabile è che la sua funzione di trasferimento presenti poli tutti a parte reale negativa.



Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema SISO lineare stazionario sia semplicemente stabile è che la sua funzione di trasferimento presenti uno o più poli semplici sull'asse immaginario e che tutti gli altri poli siano a parte reale negativa.

Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema SISO lineare stazionario sia instabile è che la sua funzione di trasferimento presenti uno o più poli multipli sull'asse immaginario oppure uno o più poli a parte reale positiva.



Una particolare risposta di un sistema lineare tempo invariante è la risposta all'impulso, che contiene i soli modi del sistema.

Ne consegue che un sistema è *asintoticamente stabile* se e solo se la sua *risposta all'impulso converge a zero*, un sistema è *semplicemente stabile* se e solo se la sua *risposta all'impulso è limitata* (oscillatoria o costante), mentre un sistema è *instabile* se e solo se la sua *risposta all'impulso diverge in ampiezza*.

ESEMPIO

Si analizzi la stabilità dei sistemi aventi le seguenti funzioni di trasferimento:

$$1) G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}; \quad 2) G(s) = \frac{s-1}{s(1+2s)}; \quad 3) G(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2};$$

$$4) G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}; \quad 5) G(s) = \frac{1}{s^2 + 4}.$$

Quindi si scrivano per ciascuna funzione di trasferimento i modi di sistema e le funzioni elementari della risposta al gradino.

Il sistema 1) è asintoticamente stabile, avendo due poli in $p_{1/2} = -1 \pm j$. Invece il sistema 2) è semplicemente stabile, con un polo in $p_1 = 0$ e un polo in $p_2 = -0.5$. Inoltre, il

sistema 3) è instabile, poiché presenta una coppia con molteplicità algebrica pari a due di poli immaginari puri in $p_{1/2}=\pm j$ e $p_{3/4}=-j$. Ancora, il sistema 4) è anch'esso instabile, poiché presenta due poli in $p_{1/2}=1\pm j$. Ancora, il sistema 5) è semplicemente stabile, poiché presenta due poli semplici in $p_{1/2}=\pm 2j$.

Avendo determinato i poli dei sistemi, è immediato individuarne i modi, che sono le funzioni elementari presenti nella risposta all'impulso: per il primo sistema essi sono $e^{-t}\cdot\cos t\cdot 1(t)$ e $e^{-t}\cdot\sin t\cdot 1(t)$; per il secondo sistema valgono $1(t)$ e $e^{-0.5t}1(t)$; per il terzo sistema essi sono $\cos t\cdot 1(t)$ e $\sin t\cdot 1(t)$ e $t\cdot\cos t\cdot 1(t)$ e $t\cdot\sin t\cdot 1(t)$; per il quarto sistema valgono $e^t\cdot\cos t\cdot 1(t)$ e $e^t\cdot\sin t\cdot 1(t)$; per il quinto sistema sono $\cos 2t\cdot 1(t)$ e $\sin 2t\cdot 1(t)$.

I modi della risposta al gradino sono le funzioni elementari presenti nell'antitrasformata di $\frac{G(s)}{s}$, pertanto si individuano facilmente aggiungendo un polo nell'origine alla funzione di trasferimento data (e quindi tenendo conto dell'incremento della molteplicità dei poli nell'origine della nuova funzione di trasferimento se quella originaria presenta già poli nell'origine): pertanto per il primo sistema i modi della risposta al gradino sono $1(t)$, $e^{-t}\cdot\cos t\cdot 1(t)$ e $e^{-t}\cdot\sin t\cdot 1(t)$; per il secondo sistema valgono $t\cdot 1(t)$, $1(t)$ e $e^{-0.5t}1(t)$; per il terzo sistema essi sono $1(t)$, $\cos t\cdot 1(t)$ e $\sin t\cdot 1(t)$ e $t\cdot\cos t\cdot 1(t)$ e $t\cdot\sin t\cdot 1(t)$; per il quarto sistema valgono $1(t)$, $e^t\cdot\cos t\cdot 1(t)$ e $e^t\cdot\sin t\cdot 1(t)$; per il quinto sistema sono $1(t)$, $\cos 2t\cdot 1(t)$ e $\sin 2t\cdot 1(t)$.

Si osservi quindi come nel secondo sistema nella risposta al gradino è presente un termine del tipo $\frac{1}{s^2}$ cui sono associati i due modi $t\cdot 1(t)$, $1(t)$.

STABILITÀ BIBO

Oltre alla stabilità a seguito di perturbazioni di durata finita, precedentemente introdotta, in letteratura si fa spesso riferimento ad un'altra e differente definizione di stabilità, la *stabilità ingresso limitato –uscita limitata (stabilità BIBO, Bounded Input – Bounded Output)*.

Un sistema SISO lineare tempoinvariante si dice stabile BIBO se, trovandosi in condizioni iniziali di quiete, ad ogni ingresso di ampiezza limitata risponde con una uscita di ampiezza limitata. In altre parole, un sistema è stabile BIBO se, dato un ingresso $x(t)$ tale che

$$|x(t)| \leq M_x \quad \forall t \geq 0$$

con M_x costante positiva, esiste una costante positiva M_y tale che la corrispondente risposta $y(t)$ soddisfi la relazione

$$|y(t)| \leq M_y \quad \forall t \geq 0.$$

Vale la seguente proprietà: *un sistema SISO lineare tempoinvariante è stabile BIBO se e solo se esso è asintoticamente stabile.*

Ne consegue che un sistema SISO lineare tempoinvariante che sia semplicemente stabile o instabile non è stabile BIBO.

La proprietà precedente è facilmente dimostrabile se si considera che un sistema asintoticamente stabile risponde ad un ingresso limitato, che ha evidentemente modi limitati per la sua caratteristica di limitatezza, con una risposta forzata che contiene tali modi limitati e quelli della funzione di trasferimento del sistema, questi ultimi convergenti poiché i poli sono tutti a parte reale negativa.

Quindi un sistema asintoticamente stabile risponde ad un qualsiasi ingresso limitato in ampiezza con una uscita che è limitata anch'essa.

Analogamente, se si considera un sistema instabile, esso risponde ad un ingresso limitato con una risposta forzata che contiene i modi dell'ingresso, limitati, e quelli della funzione di trasferimento, tra i quali alcuni sono divergenti, poiché per ipotesi almeno un polo è a parte reale positiva o multiplo e posto sull'asse delle ordinate del piano di Gauss.

Quindi un sistema instabile risponde a un ingresso limitato con una uscita non limitata e dunque non è stabile BIBO.

Più complesso è il caso dei sistemi semplicemente stabili. Un sistema siffatto risponde ad un ingresso limitato con una risposta forzata che contiene i modi dell'ingresso, limitati, e quelli della funzione di trasferimento, tra i quali alcuni sono limitati, poiché almeno un polo è semplice e posto sull'asse delle ordinate del piano di Gauss. Per alcuni ingressi limitati, tuttavia, può accadere che un polo della trasformata dell'ingresso coincida con qualcuno dei poli semplici e a parte reale nulla del sistema semplicemente stabile. Viene in tal modo eccitato il modo di ordine superiore del polo, originariamente semplice, il quale è disposto sull'asse immaginario, sì da rendere la risposta a quel particolare ingresso divergente e quindi

non limitata, pur essendo limitato l'ingresso corrispondente. Pertanto un sistema semplicemente stabile non è stabile BIBO.

ESEMPIO

Si studi la stabilità del sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s}.$$

Il sistema è semplicemente stabile, avendo un unico polo semplice in $s=0$, cui corrisponde una risposta all'impulso limitata

$$g(t) = 1(t).$$

Dimostriamo che il sistema non è stabile BIBO. Consideriamo l'ingresso di ampiezza limitata

$$x(t) = 1(t)$$

e dimostriamo che la risposta a tale ingresso non è di ampiezza limitata, per cui il sistema non è stabile BIBO. Si ha infatti:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{1}{s^2}$$

Pertanto si ha:

$$y(t) = t \cdot 1(t)$$

e la risposta è evidentemente illimitata, pur essendo l'ingresso limitato in ampiezza.

Si conclude che il sistema dato, che è semplicemente stabile, *non è stabile BIBO*.

Questo risultato era prevedibile in quanto l'ingresso limitato $1(t)$, avente trasformata $\frac{1}{s}$, contiene un polo semplice in $s=0$ che coincide con quello presente nel sistema semplicemente stabile. Viene in tal modo eccitato il modo di ordine superiore del polo, originariamente semplice, che è disposto sull'asse immaginario, sì da rendere

divergente e quindi non limitata la risposta a quel particolare ingresso, pur essendo quest'ultimo limitato.

ESEMPIO

Si analizzi la stabilità del sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + a^2}$$

con a reale positivo.

Il sistema è semplicemente stabile, avendo due poli semplici a parte reale nulla in $\pm ja$, cui corrisponde una risposta all'impulso limitata

$$g(t) = \frac{1}{a} \sin(at).$$

Dimostriamo che il sistema non è stabile BIBO. Consideriamo l'ingresso di ampiezza limitata

$$x(t) = \cos(bt),$$

con b numero reale positivo, e dimostriamo che la risposta a tale ingresso non è sempre di ampiezza limitata.

Distinguiamo i due casi $b \neq a$ e $b=a$.

Si osserva che se la pulsazione dell'ingresso soddisfa la relazione $b \neq a$ la risposta è limitata in ampiezza. Infatti si ha una trasformata della risposta:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{1}{s^2 + a^2} \cdot \frac{s}{s^2 + b^2} = \frac{\alpha_1 s + \beta_1}{s^2 + a^2} + \frac{\alpha_2 s + \beta_2}{s^2 + b^2}$$

con

$$\begin{aligned} [\alpha_1 s + \beta_1]_{s=-ja} &= Y(s) (s^2 + a^2) \Big|_{s=-ja} \\ [\alpha_2 s + \beta_2]_{s=-jb} &= Y(s) (s^2 + b^2) \Big|_{s=-jb} \end{aligned}$$

da cui dopo semplici passaggi si ha:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{-a^2 + b^2} & \text{e} & \quad \beta_1 = 0 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{+a^2 - b^2} & \text{e} & \quad \beta_2 = 0 \end{aligned}$$

Pertanto si ha:

$$Y(s) = \frac{1}{b^2 - a^2} \cdot \frac{s}{s^2 + a^2} + \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \frac{s}{s^2 + b^2}$$

quindi

$$y(t) = \frac{1}{b^2 - a^2} \cdot (\cos(at) - \cos(bt)) \cdot 1(t)$$

e la risposta è evidentemente limitata come l'ingresso.

Supponiamo ora che sia $b=a$. Proprio questo è un caso in cui all'ingresso limitato in ampiezza

$$x(t) = \cos(bt) = \cos(at)$$

corrisponde una risposta illimitata, per cui il sistema non è stabile BIBO. Si ha infatti:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}.$$

Ricordando la proprietà

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

si deduce che

$$\mathcal{L}\{t \cdot \sin(at)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\sin(at)\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{a}{s^2 + a^2} \right) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

Pertanto si ha:

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a} \mathcal{L}\{t \cdot \sin(at)\}$$

quindi

$$y(t) = \frac{1}{2a} t \cdot \sin(at) \cdot 1(t).$$

Alternativamente, è possibile usare il metodo classico di espansione in fratti semplici per derivare l'equazione precedente. Si ha infatti:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{k_{11}}{(s + ja)^2} + \frac{k_{12}}{s + ja} + \frac{k_{11}^*}{(s - ja)^2} + \frac{k_{12}^*}{s - ja}.$$

Inoltre risulta:

$$k_{11} = \left. \frac{s}{(s - ja)^2} \right|_{-ja} = \frac{-ja}{(-2ja)^2} = \frac{1}{-4ja} = \frac{1}{4a} j,$$

$$k_{12} = \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{(s - ja)^2} \right) \right|_{-ja} = \left. \frac{(s - ja)^2 - 2s(s - ja)}{(s - ja)^4} \right|_{-ja} = \left. \frac{(s - ja) - 2s}{(s - ja)^3} \right|_{-ja} = 0,$$

da cui

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{j}{4a} \cdot \frac{1}{(s + ja)^2} - \frac{j}{4a} \cdot \frac{1}{(s - ja)^2}.$$

Pertanto la risposta all'ingresso considerato vale

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{j}{4a} t \left(e^{-jat} - e^{+jat} \right) 1(t) = \frac{j}{4a} t \left(\cos(at) - j \sin(at) - \cos(at) - j \sin(at) \right) 1(t) = \\ &= \frac{1}{2a} t \cdot \sin(at) \cdot 1(t) \end{aligned},$$

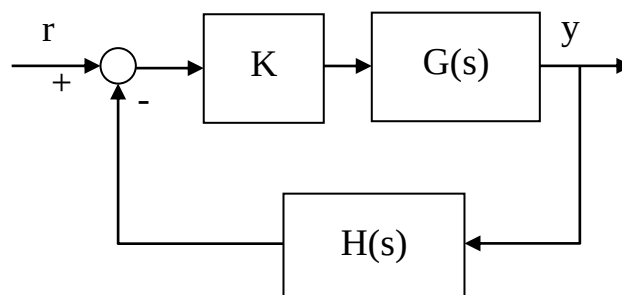
che coincide con quanto precedentemente trovato.

Pertanto il sistema risponde ad un particolare ingresso limitato in ampiezza con una uscita che è evidentemente oscillatoria illimitata. Si conclude che il sistema dato, che è semplicemente stabile, *non è stabile BIBO*.

Come nel caso precedente ($b \neq a$), anche questo risultato era prevedibile in quanto l'ingresso limitato $\cos(at)$, avente trasformata $\frac{s}{s^2 + a^2}$, contiene due poli semplici in $s = \pm ja$, che coincidono con quelli presenti nel sistema semplicemente stabile. Viene in tal modo eccitato il modo di ordine superiore di entrambi i poli, originariamente semplici, disposto sull'asse immaginario, sì da rendere la risposta, a quel particolare ingresso, divergente e quindi non limitata, pur essendo limitato l'ingresso corrispondente.

CRITERIO DI ROUTH

Consideriamo il sistema di controllo in figura.



Il sistema in anello chiuso comprende un regolatore proporzionale di guadagno K , un plant con funzione di trasferimento $G(s)$ e un trasduttore con funzione di trasferimento $H(s)$.

La funzione di trasferimento del sistema retroazionato vale:

$$G_0(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}.$$

I poli del sistema in anello chiuso sono le radici della seguente *equazione caratteristica del sistema*:

$$1 + KG(s)H(s) = 0.$$

Evidentemente, la stabilità del sistema retroazionato è univocamente determinata dalla posizione nel piano complesso dei poli della funzione di trasferimento $G_0(s)$ del sistema in anello chiuso, ossia dagli zeri (radici) dell'equazione caratteristica.

Per determinare se $G_0(s)$ è stabile o meno, in realtà non è necessario conoscere la posizione esatta dei poli, ma è sufficiente sapere se essi si trovano o meno tutti a sinistra dell'asse immaginario.

Il criterio di Routh permette di determinare se un sistema retroazionato è stabile senza calcolare la posizione delle radici dell'equazione caratteristica.

Si supponga che l'equazione caratteristica sia scritta nella forma polinomiale:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0.$$

Il polinomio a primo membro dell'equazione caratteristica è detto polinomio caratteristico (del sistema in anello chiuso). Le sue radici sono evidentemente i poli del sistema in anello chiuso.

Lemma di Routh: *condizione necessaria affinché le radici dell'equazione caratteristica abbiano tutte parte reale negativa è che tutti i coefficienti del polinomio caratteristico siano di segno concorde.*

In particolare, è facile dimostrare che il Lemma di Routh individua una condizione sia necessaria che sufficiente per l'asintotica stabilità se il sistema è del secondo ordine.

Mentre in generale il lemma di Routh fornisce una condizione necessaria per l'asintotica stabilità di un sistema, il criterio di Routh fornisce una condizione necessaria e sufficiente.

Il criterio di Routh si basa sulla costruzione della tabella di Routh a partire dal polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso. La tabella di Routh si costruisce come segue.

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	...
s^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	...	...
s^{n-3}	c_{n-3}	c_{n-5}	...	...	...
...	...	...	...	...	...

dove

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}},$$

$$b_{n-6} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}, \dots$$

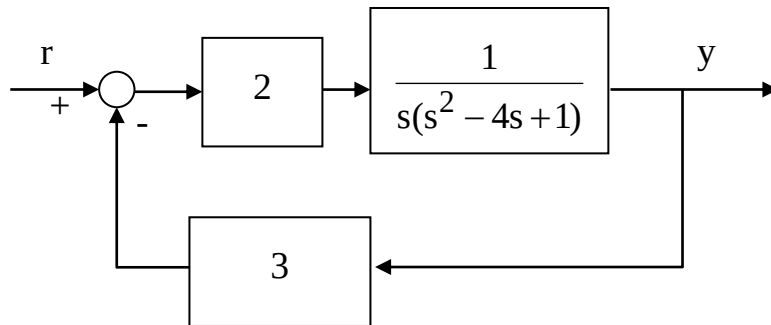
$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}}, \quad c_{n-5} = \frac{b_{n-2}a_{n-5} - a_{n-1}b_{n-6}}{b_{n-2}}, \dots$$

Criterio di Routh: ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella di Routh corrisponde una radice a parte reale positiva dell'equazione caratteristica, ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa.

Dal criterio si può dedurre quanto segue: condizione necessaria e sufficiente affinché le radici dell'equazione caratteristica abbiano tutte parte reale negativa è che tutti i termini della prima colonna della tabella di Routh siano di segno concorde.

Analogamente si ha: *condizione sufficiente affinché un sistema lineare SISO tempoinvariante sia instabile è che tra i termini della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata vi sia almeno uno di segno discorde dagli altri.*

ESEMPIO



Consideriamo il sistema in figura e determiniamone la funzione di trasferimento in anello chiuso:

$$G_0(s) = \frac{\frac{2}{s(s^2 - 4s + 1)}}{1 + \frac{6}{s(s^2 - 4s + 1)}} = \frac{2}{s^3 - 4s^2 + s + 6}.$$

Ponendo a zero il denominatore della funzione di trasferimento individuiamo l'equazione caratteristica del sistema:

$$s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0.$$

Osserviamo preliminarmente che i coefficienti del polinomio caratteristico non sono tutti dello stesso segno. Per il lemma di Routh si conclude che il sistema non è asintoticamente stabile (ma potrebbe essere sia semplicemente stabile che instabile).

La tabella di Routh associata al sistema è la seguente.

s^3	1	1
s^2	-4	6
s^1	$\frac{-4-6}{-4} = \frac{5}{2}$	
s^0	$\frac{5}{2} \cdot 6 = 6 = a_0$	

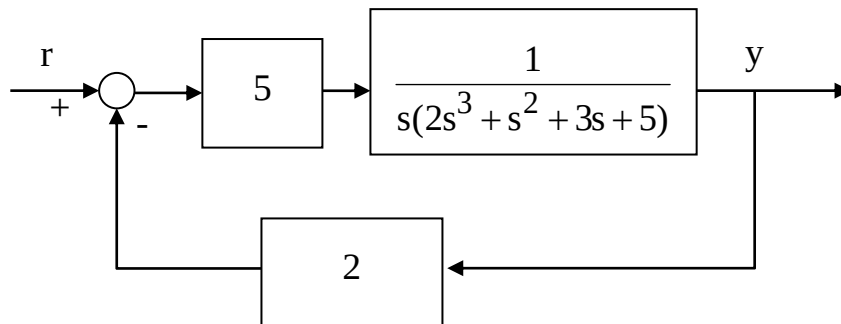
Si osserva che il termine presente sull'ultima riga è pari ad a_0 . Questa è una proprietà generale della tabella di Routh.

Dalla tabella di Routh si osserva che essa presenta due variazioni di segno sulla prima colonna, dunque il sistema è instabile con due poli nel semipiano destro. Infatti l'equazione caratteristica si può riformulare come segue:

$$s^3 - 4s^2 + s + 6 = (s+1)(s-2)(s-3) = 0$$

e la presenza dei poli +2 e +3 nel semipiano destro fa sì che il sistema sia instabile.

ESEMPIO



Consideriamo il sistema in figura e determiniamone la funzione di trasferimento in anello chiuso:

$$G_0(s) = \frac{\frac{5}{s(2s^3 + s^2 + 3s + 5)}}{1 + \frac{10}{s(2s^3 + s^2 + 3s + 5)}} = \frac{5}{2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10}.$$

Ponendo a zero il denominatore della funzione di trasferimento individuiamo l'equazione caratteristica del sistema:

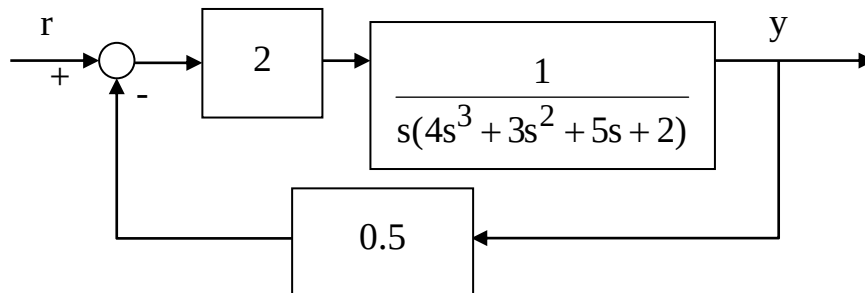
$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0.$$

Osserviamo preliminarmente che i coefficienti del polinomio caratteristico sono tutti dello stesso segno. Il lemma di Routh non fornisce dunque alcuna indicazione sulla stabilità del sistema. La tabella di Routh associata al sistema è la seguente.

s^4	2	3	10
s^3	1	5	
s^2	$\frac{3-10}{1} = -7$	$\frac{10}{1} = 10$	
s^1	$\frac{-35-10}{-7} = \frac{45}{7}$		
s^0	10 = a_0		

Dalla tabella di Routh si osserva che essa presenta due variazioni di segno sulla prima colonna, dunque il sistema è instabile con due poli nel semipiano destro.

ESEMPIO



Consideriamo il sistema in figura e determiniamone la funzione di trasferimento in anello chiuso:

$$G_0(s) = \frac{2}{s(4s^3 + 3s^2 + 5s + 2)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{s(4s^3 + 3s^2 + 5s + 2)}} = \frac{2}{4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1}.$$

Ponendo a zero il denominatore della funzione di trasferimento individuiamo l'equazione caratteristica del sistema:

$$4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0.$$

Osserviamo preliminarmente che i coefficienti del polinomio caratteristico sono tutti dello stesso segno. Il lemma di Routh non fornisce dunque alcuna indicazione sulla stabilità del sistema.

Il criterio di Routh rimane valido anche se si moltiplicano *tutti* i coefficienti di una riga per un coefficiente *positivo*.

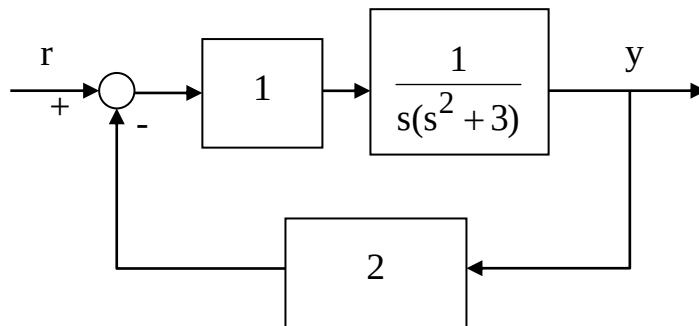
La tabella di Routh associata al sistema è la seguente.

s^4	4	$\searrow^p$	5	1
s^3	3		2	
s^2	$7/3 \rightarrow 7$	$\searrow^p$	$1 \rightarrow 3$	
s^1	$5/7 \rightarrow 5$	$\searrow^p$		
s^0	$3 \rightarrow 1$	$\searrow^p$		

La tabella di Routh non presenta variazioni di segno sulla prima colonna, dunque il sistema è asintoticamente stabile, con quattro poli tutti nel semipiano sinistro.

Vediamo nel seguito alcuni casi particolari di tabelle di Routh.

Può accadere ad esempio che un coefficiente della prima colonna (il primo termine di una riga) sia nullo. In tal caso esso viene sostituito con una quantità *positiva* ϵ che poi si fa tendere a zero, e si ragiona come nel caso generale.

ESEMPIO

Consideriamo il sistema in figura. Evidentemente il sistema in anello aperto è semplicemente stabile, con tre poli disposti sull'asse immaginario. Determiniamo la funzione di trasferimento in anello chiuso del sistema:

$$G_0(s) = \frac{\frac{1}{s(s^2 + 3)}}{1 + \frac{2}{s(s^2 + 3)}} = \frac{1}{s^3 + 3s + 2}.$$

Ponendo a zero il denominatore della funzione di trasferimento individuiamo l'equazione caratteristica del sistema:

$$s^3 + 3s + 2 = 0.$$

Osserviamo preliminarmente che i coefficienti del polinomio caratteristico *non* sono tutti dello stesso segno (il coefficiente del termine s^2 è nullo, quindi non è positivo come gli altri). Per il lemma di Routh si conclude che il sistema non è asintoticamente stabile (ma potrebbe essere sia semplicemente stabile che instabile).

La tabella di Routh associata al sistema è la seguente.

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^3 & 1 & & \\
 s^2 & (0) \ \varepsilon & & \\
 s^1 & \frac{3\varepsilon - 2}{\varepsilon} = 3 - \frac{2}{\varepsilon} & & \\
 s^0 & 2 & &
 \end{array}$$

Arrows indicating sign changes: from $(0) \ \varepsilon$ to $3 - \frac{2}{\varepsilon}$ (labeled 'p'), from $3 - \frac{2}{\varepsilon}$ to 2 (labeled 'v'), and from 2 back to $(0) \ \varepsilon$ (labeled 'v').

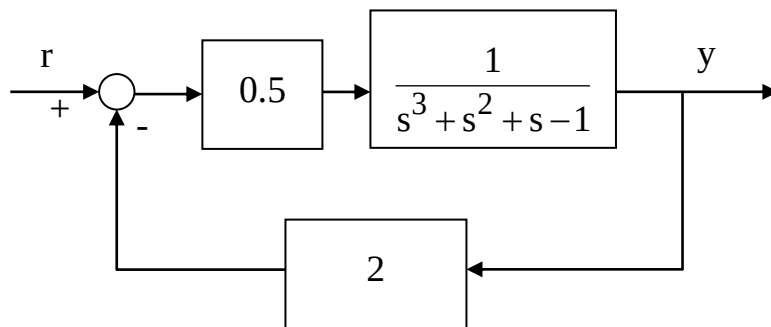
I primi due termini della tabella di Routh sono positivi. Il terzo termine, invece, per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ tende al valore $-\infty$, mentre il quarto è positivo.

Si deduce che la tabella di Routh presenta due variazioni di segno sulla prima colonna, dunque il sistema è instabile, con due poli a parte reale positiva e un terzo posto nel semipiano sinistro, quindi reale negativo.

Un altro caso particolare si ha quando una intera riga della tabella di Routh è nulla.

Si può dimostrare che tale situazione può verificarsi solo per una riga dispari (s^1 , s^3 , ecc...) o per l'ultima riga (s^0), che è costituita da un solo elemento. L'ultimo caso è semplice da analizzare: si ha $a_0=0$, quindi manca il termine noto nel polinomio caratteristico. Ne consegue che il sistema in anello chiuso ha almeno un polo nullo nell'origine.

ESEMPIO



Consideriamo il sistema in figura e determiniamone la funzione di trasferimento in anello chiuso:

$$G_0(s) = \frac{0.5}{s^3 + s^2 + s - 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{s^3 + s^2 + s - 1}} = \frac{0.5}{s^3 + s^2 + s}.$$

Ponendo a zero il denominatore della funzione di trasferimento individuiamo l'equazione caratteristica del sistema:

$$s^3 + s^2 + s = 0.$$

Osserviamo preliminarmente che i coefficienti del polinomio caratteristico *non* sono tutti dello stesso segno (il coefficiente del termine s^0 è nullo, quindi non è positivo come gli altri). Per il lemma di Routh si conclude che il sistema non è asintoticamente stabile (ma potrebbe essere sia semplicemente stabile che instabile).

La tabella di Routh associata al sistema è la seguente.

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^3 & 1 & \searrow p & 1 \\
 s^2 & 1 & \searrow p & 0 \\
 s^1 & 1 & \searrow p & \\
 s^0 & 0(=a_0) & \searrow ? &
 \end{array}$$

I primi tre termini della tabella di Routh sono positivi. Il quarto termine, invece, è nullo.

Si deduce che la tabella di Routh presenta due permanenze di segno sulla prima colonna, quindi due poli nel semipiano sinistro, e una riga (l'ultima) nulla. In effetti, quest'ultimo valore nullo indica che il sistema ha un polo in anello chiuso posto nell'origine, infatti il polinomio caratteristico si fattorizza come segue:

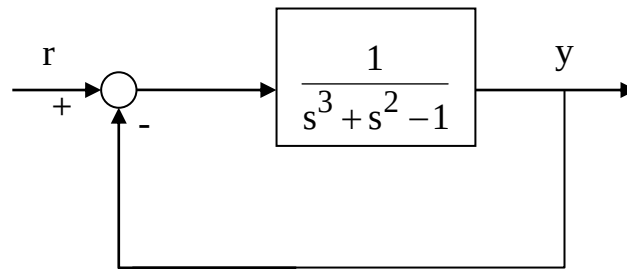
$$s^3 + s^2 + s = s(s^2 + s + 1).$$

Pertanto i poli del sistema in anello chiuso valgono:

$$s_1=0, s_{2/3}=-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

In definitiva il sistema in anello chiuso è semplicemente stabile.

Nell'esempio successivo consideriamo il caso in cui non solo l'ultima riga si annulla ma anche una o più righe che la precedono. Evidentemente, ciò corrisponde ad un polo in anello chiuso nell'origine multiplo, dunque ad un sistema instabile in anello chiuso.

ESEMPIO

Consideriamo il sistema in figura e determiniamone la funzione di trasferimento in anello chiuso:

$$G_0(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 - 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{s^3 + s^2 - 1}} = \frac{1}{s^3 + s^2}.$$

Ponendo a zero il denominatore della funzione di trasferimento individuiamo l'equazione caratteristica del sistema:

$$s^3 + s^2 = 0.$$

Osserviamo preliminarmente che i coefficienti del polinomio caratteristico *non* sono tutti dello stesso segno (i coefficienti dei termini s^1 e s^0 sono nulli, quindi non sono positivi come gli altri). Per il lemma di Routh si conclude che il sistema non è asintoticamente stabile (ma potrebbe essere sia semplicemente stabile che instabile).

La tabella di Routh associata al sistema è la seguente.

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & \searrow p & 0 \\ s^2 & 1 & \searrow ? & 0 \\ s^1 & 0 & \searrow ? & \\ s^0 & 0(=a_0) & \searrow ? & \end{array}$$

I primi due termini della tabella di Routh sono positivi. Le ultime due righe sono entrambe nulle.

Si deduce che la tabella di Routh presenta una permanenza di segno sulla prima colonna, quindi un polo nel semipiano sinistro. Inoltre le ultime due righe nulle indicano che il sistema ha un polo doppio in anello chiuso posto nell'origine, infatti il polinomio caratteristico si fattorizza come segue:

$$s^3 + s^2 = s^2(s + 1).$$

In definitiva il sistema in anello chiuso è instabile, avendo un polo in -1 e uno doppio nell'origine.

Consideriamo ora il caso generale in cui la riga dispari di numero $2m-1$ sia completamente nulla.

$$\begin{array}{c|cccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s^{2m} & b_{2m} & b_{2m-2} & \dots & b_0 \\ s^{2m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}$$

Le variazioni e le permanenze della prima colonna della tabella fino alla $2m$ -esima riga determinano univocamente la posizione nel piano di Gauss delle prime $n-2m$ radici dell'equazione data.

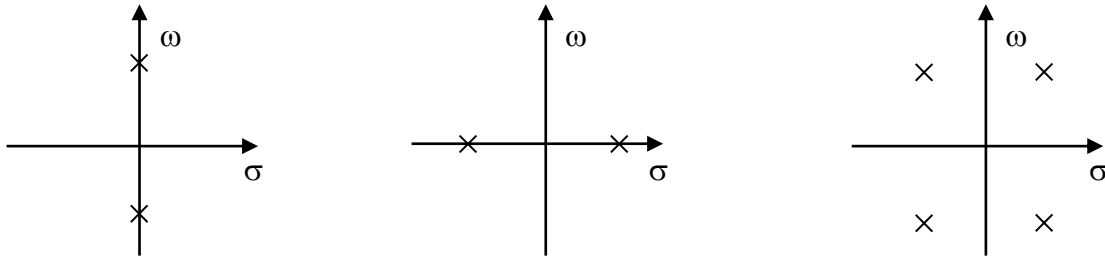
Le rimanenti $2m$ radici dell'equazione caratteristica (e quindi le loro posizioni nel piano di Gauss) si determinano come soluzioni della seguente *equazione ausiliaria*:

$$b_{2m}s^{2m} + b_{2m-2}s^{2m-2} + \dots + b_2s^2 + b_0 = 0.$$

Tale equazione si può risolvere facilmente, se essa è di ordine minore o uguale a 4, ponendo $z=s^2$.

Le soluzioni dell'equazione ausiliaria sono un sottoinsieme delle soluzioni dell'equazione caratteristica di partenza.

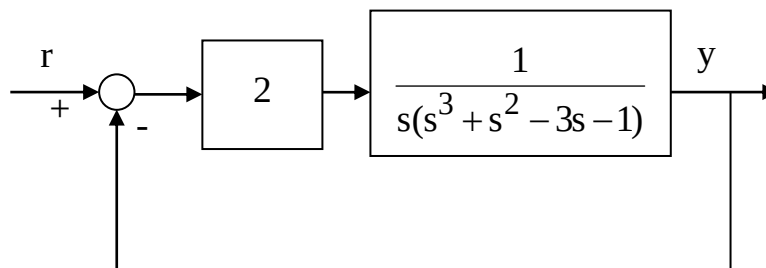
In particolare, è possibile dimostrare che le $2m$ radici dell'equazione ausiliaria sono sempre *simmetriche rispetto all'origine del piano complesso*. Alcuni esempi sono riportati nelle figure successive.



Se l'equazione caratteristica è di ordine superiore a 4, l'equazione ausiliaria non è sempre risolvibile analiticamente. In tal caso si determina il polinomio derivata prima del polinomio associato all'equazione ausiliaria e si sostituiscono i coefficienti del polinomio derivata prima alla $(2m-1)$ -esima riga tutta nulla della tabella di Routh, procedendo nella costruzione di quest'ultima e traendo le conclusioni in base al criterio di Routh.

In questo caso, tuttavia, mentre le variazioni determinate a partire dalla riga originariamente nulla individuano radici nel semipiano destro, le permanenze a partire dalla riga originariamente nulla *non* devono essere interpretate come radici a parte reale negativa. In particolare alcune di esse rappresentano radici disposte nel semipiano sinistro, altre sull'asse immaginario.

ESEMPIO



Consideriamo il sistema in figura e determiniamone la funzione di trasferimento in anello chiuso:

$$G_0(s) = \frac{\frac{2}{s(s^3 + s^2 - 3s - 1)}}{1 + \frac{2}{s(s^3 + s^2 - 3s - 1)}} = \frac{2}{s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2}.$$

Ponendo a zero il denominatore della funzione di trasferimento individuiamo l'equazione caratteristica del sistema:

$$s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2 = 0.$$

Osserviamo preliminarmente che i coefficienti del polinomio caratteristico non sono tutti dello stesso segno. Per il lemma di Routh il sistema *non* è asintoticamente stabile. Per determinare se esso sia semplicemente stabile o instabile è necessario costruire la tabella di Routh e applicare il criterio di Routh.

La tabella di Routh del sistema è la seguente.

s^4	1	$\searrow$ p	-3	2
s^3	1	$\searrow$ v	-1	
s^2	-2	$\searrow$?	2	
s^1	0	$\searrow$?		
s^0	2	$\searrow$?		

La riga numero 1 si annulla completamente, mentre la riga di ordine zero è nota, poiché essa comprende il termine noto del polinomio caratteristico.

Dall'analisi dei primi tre elementi della prima colonna si osserva che dei quattro poli in anello chiuso (l'equazione caratteristica è del quarto ordine) un polo è a parte reale negativa e un altro a parte reale positiva (vi sono una permanenza e una variazione nella prima colonna della tabella di Routh), mentre sulla posizione degli altri due poli nel piano di Gauss non è al momento possibile trarre conclusioni. È già chiaro, comunque, che il sistema è instabile, avendo almeno un polo nel semipiano destro.

Si osserva poi che l'equazione ausiliaria vale:

$$-2s^2 + 2 = 0$$

ossia si scrive

$$s^2 = 1$$

ed ha dunque due radici in

$$s = \pm 1.$$

In definitiva vi sono due poli reali negativi e due reali positivi (per la simmetria rispetto all'asse reale della mappa poli-zeri, e poiché due radici sono note e reali e le altre due sono disposte in due semipiani differenti, evidentemente le quattro radici sono tutte reali). Il sistema è instabile.

È altresì possibile determinare gli altri due poli, dividendo il polinomio caratteristico per il termine $(s-1)(s+1)=(s^2-1)$. Si determinano così le altre due radici, poste in -2 e $+1$.

Un modo alternativo di procedere consiste nel derivare l'equazione ausiliaria e sostituire nella tabella di Routh i coefficienti ottenuti alla riga nulla, continuando a determinare la rimanente parte della tabella secondo il metodo generale. In questo caso si ha:

$$\frac{d}{ds}(-2s^2 + 2) = -4s$$

e la tabella di Routh diventa la seguente.

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & \searrow p & -3 & 2 \\ s^3 & 1 & \searrow v & -1 & \\ s^2 & -2 & \searrow p & 2 & \\ s^1 & -4 & \searrow v & & \\ s^0 & 2 & & & \end{array}$$

Come previsto, si ottengono due permanenze e due variazioni di segno sulla prima colonna: pertanto in questo caso il metodo della derivata dell'equazione ausiliaria è efficace. Il sistema è instabile, avendo due poli nel semipiano destro di Gauss.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione caratteristica:

$$s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0.$$

Osserviamo che i coefficienti del polinomio caratteristico non sono tutti dello stesso segno. Per il lemma di Routh il sistema *non* è asintoticamente stabile. Procediamo con la determinazione della tabella di Routh.

s^6	1	$\curvearrowright$ p	-2	-7	-4
s^5	1	$\searrow$	-3	-4	
s^4	1	$\curvearrowright$ p	-3	-4	
s^3	0	$\searrow$?	0		
s^2	?	$\searrow$?			
s^1	?	$\searrow$?			
s^0	-4	$\searrow$?			

La riga numero 3 si è annullata completamente, mentre la riga di ordine zero è nota, poiché comprende il termine noto del polinomio caratteristico.

Dall'analisi dei primi tre elementi della prima colonna si osserva che due dei sei poli in anello chiuso sono a parte reale negativa, essendoci due permanenze.

L'equazione ausiliaria è

$$s^4 - 3s^2 - 4 = 0$$

che si risolve ponendo $z=s^2$ e ottenendo l'equazione

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

che ha due radici in

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}.$$

Dunque le radici sono in

$$s^2 = 4 \text{ ossia } s = \pm 2$$

e in

$$s^2 = -1 \text{ ossia } s = \pm j$$

Oltre alle precedenti quattro radici, il sistema presenta altri due poli in anello chiuso (infatti l'equazione caratteristica è del sesto ordine) disposti nel semipiano sinistro per via delle due permanenze individuate nella prima colonna della tabella di Routh. In definitiva vi sono tre poli a parte reale negativa, due a parte reale nulla e uno a parte reale positiva. Il sistema è instabile.

È altresì possibile determinare gli altri due poli non noti, dividendo il polinomio caratteristico per il termine $s^4 - 3s^2 - 4$. Si determinano così le altre due radici, poste in $-0.5 \pm 0.866j$.

Un modo alternativo di procedere consiste nel derivare l'equazione ausiliaria e sostituire i coefficienti ottenuti alla riga nulla. In questo caso si ha:

$$\frac{d}{ds}(s^4 - 3s^2 - 4) = 4s^3 - 6s$$

e la tabella di Routh diventa la seguente.

s^6	1	$\swarrow$	-2	-7	-4
s^5	1	$\searrow$	-3	-4	
s^4	1	$\swarrow$	-3	-4	
s^3	4	$\searrow$	-6		
s^2	-6	$\swarrow$	-16		
s^1	-100	$\searrow$			
s^0	-4	$\swarrow$			

Si ottengono cinque permanenze e una variazione di segno sulla prima colonna. Il sistema è instabile, avendo un polo a parte reale positiva. In questo caso le permanenze a partire dalla riga originariamente nulla *non* devono essere interpretate come radici a parte reale negativa, ma come radici disposte simmetricamente rispetto all'origine. In questo caso si hanno infatti, oltre alle due radici a parte reale negativa corrispondenti alle prime due permanenze “effettive” ($-0.5 \pm 0.866j$) anche la radice reale positiva (+2) corrispondente alla variazione, una ulteriore radice a parte reale negativa (-2) e due poste sull'asse immaginario ($\pm j$).

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione caratteristica:

$$s^4 + 2s^2 + 1 = 0.$$

Osserviamo che i coefficienti del polinomio caratteristico non sono tutti dello stesso segno. Per il lemma di Routh il sistema *non* è asintoticamente stabile. Procediamo con la determinazione della tabella di Routh.

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & ? & 2 & 1 \\ s^3 & 0 & ? & 0 & \\ s^2 & ? & ? & & \\ s^1 & ? & ? & & \\ s^0 & 1 & ? & & \end{array}$$

La riga numero 3 si è annullata completamente, mentre la riga di ordine zero è nota, poiché comprende il termine noto del polinomio caratteristico.

L'equazione ausiliaria è la stessa equazione caratteristica, la cui derivata vale:

$$\frac{d}{ds}(s^4 + 2s^2 + 1) = 4s^3 + 4s$$

e la tabella di Routh diventa la seguente.

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & p & 2 & 1 \\ s^3 & 4 & p & 4 & \\ s^2 & 1 & p & 1 & \\ s^1 & 2 & p & & \\ s^0 & 1 & p & & \end{array}$$

Si ottengono quattro permanenze, che *non* possono essere interpretate come radici a parte reale negativa, ma come radici disposte simmetricamente rispetto all'origine. In effetti, osservando che l'equazione caratteristica è una equazione binomiale, essa si risolve facilmente ponendo $z=s^2$ e ottenendo l'equazione

$$z^2 + 2z + 1 = 0$$

che ha due radici in $z_{1/2} = -1$.

Dunque si hanno delle radici doppie in

$$s^2 = -1 \text{ ossia } s_{1/2} = +j, s_{3/4} = -j.$$

Pertanto il sistema è instabile, anche se la tabella di Routh ottenuta con il metodo della derivata dell'equazione ausiliaria presenta solo permanenze.

ESEMPIO

Consideriamo il sistema con equazione caratteristica:

$$s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0.$$

Osserviamo che i coefficienti del polinomio caratteristico sono tutti dello stesso segno. Tramite il lemma di Routh non è possibile concludere nulla sulla stabilità del sistema. Procediamo con la determinazione della tabella di Routh.

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	
s^4	2	12	16	
s^3	0	0		
s^2	?			
s^1	?			
s^0	16			

La riga numero 3 si è annullata completamente, mentre la riga di ordine zero è nota, poiché comprende il termine noto del polinomio caratteristico.

Dall'analisi dei primi tre elementi della prima colonna si osserva che due poli sono a parte reale negativa, essendoci due permanenze.

L'equazione ausiliaria è

$$s^4 + 6s^2 + 8 = 0$$

che si risolve ponendo $z=s^2$ e ottenendo l'equazione

$$z^2 + 6z + 8 = 0,$$

che ha due radici in

$$z = -3 \pm \sqrt{9-8} = \begin{cases} -4 \\ -2 \end{cases}.$$

Dunque le radici sono disposte in

$$s^2 = -4$$

ossia

$$s = \pm 2j$$

e in

$$s^2 = -2$$

ossia

$$s = \pm \sqrt{2}j$$

In definitiva vi sono due poli a parte reale negativa e due coppie di poli semplici immaginari puri. Il sistema è semplicemente stabile.

È possibile determinare gli altri due poli dividendo il polinomio caratteristico per il termine $s^4 + 6s^2 + 8$. Si determinano così le altre due radici non note, poste in $-1 \pm j$.

Deriviamo l'equazione ausiliaria e sostituiamo i coefficienti ottenuti alla riga nulla. In questo caso si ha:

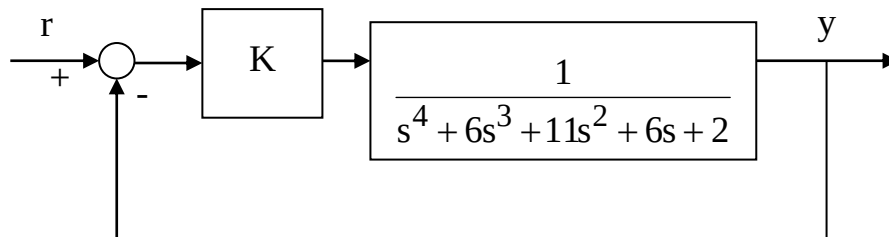
$$\frac{d}{ds}(s^4 + 6s^2 + 8) = 4s^3 + 12s$$

e la tabella di Routh diventa la seguente.

s^6	1	8	20	16
s^5	1	6	8	
s^4	1	6	8	
s^3	4 → 1	12 → 3		
s^2	3	8		
s^1	1			
s^0	16			

Si ottengono sei permanenze. Il sistema *non presenta radici nel semipiano destro*, non essendoci variazioni tra i segni dei coefficienti della prima colonna della tabella di Routh. Anche in questo caso le permanenze a partire dalla riga originariamente nulla *non* devono essere interpretate come radici a parte reale negativa, ma come radici alcune poste sul semipiano sinistro e altre poste sull'asse immaginario. In questo caso si hanno appunto, oltre alle due radici a parte reale negativa corrispondenti alle prime due permanenze “effettive” $(-1 \pm j)$, quattro radici poste sull'asse immaginario $(\pm 2j, \pm \sqrt{2}j)$. Il sistema è semplicemente stabile.

ESEMPIO



Consideriamo il sistema in figura. La funzione di trasferimento del sistema retroazionato è:

$$G_0(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}.$$

L'equazione caratteristica del sistema è quindi:

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

ossia

$$1 + \frac{K}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 2} = 0$$

che in forma polinomiale diventa

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + (K + 2) = 0.$$

Si vogliono determinare le proprietà di stabilità del sistema al variare del guadagno K dell'amplificatore nell'insieme dei numeri reali. Costruiamo la tabella di Routh del sistema.

s^4	1	11	$K+2$
s^3	6	6	
s^2	10	$K+2$	
s^1	$48-6K$		
s^0	$K+2$		

Evidentemente le permanenze e le variazioni (le posizioni dei poli del sistema nel piano di Gauss) dipendono dal valore di K . Esaminiamo i segni dei coefficienti della prima colonna della tabella.

	-2	8
1	p	p
6	p	p
10	p	p
$48-6K$	p	v
$K+2$	v	v

Si hanno i seguenti casi.

- 1) $K < -2$. Vi sono tre permanenze e una variazione. Il sistema è instabile con un polo nel semipiano destro.
- 2) $-2 < K < 8$. Vi sono quattro permanenze. Il sistema è asintoticamente stabile.
- 3) $K > 8$. Vi sono due permanenze e due variazioni. Il sistema è instabile con due poli nel semipiano destro.

4) $K=-2$ Sostituendo il valore di K l'equazione caratteristica diventa la seguente:

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s = 0.$$

Costruiamo la tabella di Routh del sistema in questo caso particolare.

s^4	1	$\searrow$ p	11	0
s^3	6	$\searrow$ p	6	
s^2	10	$\searrow$ p	0	
s^1	6	$\searrow$ p		
s^0	0			

Si hanno tre permanenze e l'ultima riga nulla, che corrisponde ad un polo nell'origine, come è facile dedurre osservando il polinomio caratteristico. Il sistema è semplicemente stabile.

5) $K=8$ Sostituendo il valore di K l'equazione caratteristica diventa la seguente:

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 10 = 0.$$

Costruiamo la tabella di Routh del sistema in questo ulteriore caso particolare.

s^4	1	$\searrow$ p	11	10
s^3	6	$\searrow$ p	6	
s^2	10	$\searrow$ p	10	
s^1	0			
s^0	10			

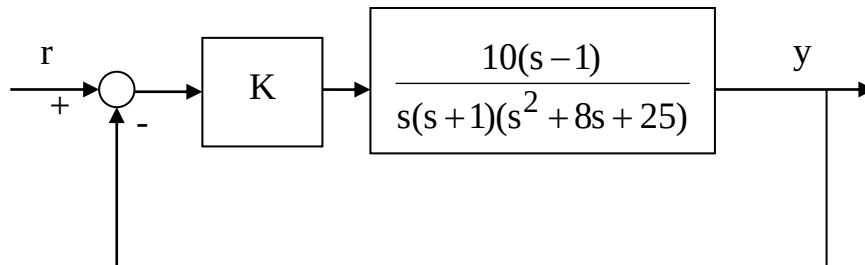
Si hanno due permanenze e si annulla la riga 1, situazione che corrisponde a due poli reali negativi e due ulteriori radici simmetriche rispetto all'origine del piano di Gauss. Determiniamo queste risolvendo l'equazione ausiliaria.

$$10s^2 + 10 = 0 \Rightarrow s = \pm j.$$

Il sistema è semplicemente stabile.

ESEMPIO

Determinare per quali valori del guadagno K nell'insieme dei numeri reali il sistema retroazionato in figura è asintoticamente stabile. Quindi si studino le proprietà di stabilità del sistema in anello chiuso al variare di K nell'insieme dei numeri reali.



L'equazione caratteristica del sistema è

$$1 + \frac{10K(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)} = 0$$

che in forma polinomiale diventa

$$s^4 + 9s^3 + 33s^2 + (25 + 10K)s - 10K = 0.$$

Costruiamo la tabella di Routh del sistema.

s^4	1	33	-10K
s^3	9	$25+10K$	
s^2	$272-10K$	$-90K$	
s^1	$\frac{(272-10K)(25+10K) + 810K}{(272-10K)}$		
s^0	$-10K$		

Evidentemente le permanenze e le variazioni (le posizioni dei poli del sistema nel piano di Gauss) dipendono dal valore di K . Poiché si vogliono determinare i soli valori del guadagno K per i quali il sistema è asintoticamente stabile, si richiede che sulla prima colonna vi siano unicamente permanenze, ossia che sia valido il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 272 - 10K > 0 \\ (272 - 10K)(25 + 10K) + 810K > 0 \\ -90K > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K < \frac{272}{10} \\ -5K^2 + 164K + 340 > 0 \\ K < 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 5K^2 - 164K - 340 < 0 \\ K < 0 \end{cases}$$

o anche

$$\begin{cases} -1.956 \approx \frac{164 - \sqrt{33696}}{10} < K < \frac{164 + \sqrt{33696}}{10} \approx 34.757 \\ K < 0 \end{cases}$$

da cui si deduce che il sistema è asintoticamente stabile per

$$\frac{164 - \sqrt{33696}}{10} < K < 0.$$

Nel seguito, anche se il problema non lo richiede, analizziamo comunque per motivi didattici le proprietà di stabilità del sistema in modo completo, analizzando singolarmente i segni dei coefficienti della prima colonna della tabella.

	-1.956	0	27.2	34.757
1				
9				
272-10K				
$\frac{20(-5K^2 + 164K + 340)}{(272 - 10K)}$				
-90K				

Si hanno i seguenti casi.

1) $K < \frac{164 - \sqrt{33696}}{10}$. Vi sono due permanenze e due variazioni. Il sistema è instabile con due poli nel semipiano destro.

2) $\frac{164 - \sqrt{33696}}{10} < K < 0$. Vi sono quattro permanenze. Il sistema è asintoticamente stabile.

3) $0 < K < \frac{272}{10}$. Vi sono tre permanenze e una variazione. Il sistema è instabile con un polo nel semipiano destro.

4) $\frac{272}{10} < K < \frac{164 + \sqrt{33696}}{10}$. Vi sono tre permanenze e una variazione. Il sistema è instabile con un polo nel semipiano destro.

5) $K > \frac{164 + \sqrt{33696}}{10}$. Vi sono una permanenza e tre variazioni. Il sistema è instabile con tre poli nel semipiano destro.

6) $K = \frac{164 - \sqrt{33696}}{10}$ L'equazione caratteristica diventa la seguente:

$$s^4 + 9s^3 + 33s^2 + 5.44s + 19.56 = 0.$$

Costruiamo la tabella di Routh del sistema in questo caso particolare.

s^4	1	33	19.56
s^3	9	5.44	
s^2	291.56	176.04	
s^1	0		
s^0	19.56		

I primi tre coefficienti della equazione caratteristica sono positivi, dunque si hanno due permanenze e due poli a parte reale negativa.

Inoltre si annulla la riga 1, situazione che corrisponde a due ulteriori radici simmetriche rispetto all'origine del piano di Gauss. Determiniamo queste ultime con l'equazione ausiliaria.

$$(272-10K)s^2-90K=0$$

che ha soluzione

$$s = \pm \sqrt{\frac{90K}{(272-10K)}} = \pm 0.7770j.$$

Il sistema è semplicemente stabile.

7) $K=0$ L'equazione caratteristica diventa la seguente in questo caso particolare (corrispondente al caso dell'anello aperto, infatti il polinomio caratteristico coincide con il denominatore della $G(s)$):

$$s^4 + 9s^3 + 33s^2 + 25s = 0.$$

Costruiamo la tabella di Routh del sistema.

s^4	1	$\searrow^p$	33	0
s^3	9	$\swarrow^p$	25	
s^2	272	$\searrow^p$	0	
s^1	25	$\swarrow^p$		
s^0	0			

Si hanno tre permanenze e si annulla la riga 0, situazione che corrisponde a tre poli a parte reale negativa e ad una ulteriore radice nell'origine.

Il sistema è semplicemente stabile.

8) $K = \frac{272}{10}$ L'equazione caratteristica diventa la seguente in questo caso particolare:

$$s^4 + 9s^3 + 33s^2 + 297s - 272 = 0.$$

Costruiamo la tabella di Routh del sistema.

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & 1 & 33 & -272 \\
 s^3 & 9 & 297 & \\
 s^2 & 0 \rightarrow \varepsilon & -272 & \\
 s^1 & 297 + 2448/\varepsilon & & \\
 s^0 & -272 & &
 \end{array}$$

$\swarrow \text{p}$ $\searrow \text{p}$ $\swarrow \text{p}$ $\searrow \text{v}$

Si hanno tre permanenze e una variazione, il sistema è instabile.

9) $K = \frac{164 + \sqrt{33696}}{10}$

L'equazione caratteristica diventa la seguente:

$$s^4 + 9s^3 + 33s^2 + 372.565s - 347.565 = 0.$$

Costruiamo la tabella di Routh del sistema in questo caso particolare.

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & 1 & 33 & -347.565 \\
 s^3 & 9 & 372.565 & \\
 s^2 & -75.565 & -3128.100 & \\
 s^1 & 0 & & \\
 s^0 & -3128.100 & &
 \end{array}$$

$\swarrow \text{p}$ $\searrow \text{v}$

Si hanno una permanenza e una variazione, ossia un polo a parte reale negativa e uno a parte reale positiva.

Inoltre si annulla la riga 1, situazione che corrisponde a due ulteriori radici simmetriche rispetto all'origine del piano di Gauss. Determiniamo queste ultime con l'equazione ausiliaria.

$$-75.565s^2 - 3128.100 = 0$$

che ha soluzione

$$s = \pm 6.434j.$$

Il sistema è dunque instabile, con un polo nel semipiano sinistro, uno nel semipiano destro e due poli semplici sull'asse immaginario.

Osserviamo che il criterio di Routh è utile per determinare la stabilità di un sistema anche al variare di più di un parametro. Vediamo un esempio.

ESEMPIO

Sia un sistema in anello chiuso con retroazione unitaria e funzione di trasferimento del ramo diretto pari a:

$$G(s) = K \frac{\alpha}{s(s+a)(s+b)}$$

con K parametro positivo e a , b e α coefficienti reali positivi. Si determinino le relazioni che i parametri devono soddisfare affinché il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$s^3 + (a+b)s^2 + (ab)s + \alpha K = 0$$

e il lemma di Routh è verificato per le ipotesi iniziali sui parametri del sistema. Si ottiene la seguente tabella di Routh.

s^3	1	ab
s^2	$a+b$	αK
s^1	$(a+b)ab - \alpha K$	
s^0	αK	

Si osserva che il sistema è asintoticamente stabile per

$$(a+b)ab - \alpha K > 0$$

ossia nell'intervallo

$$0 < K < \frac{(a+b)ab}{\alpha}.$$

Il sistema si dice condizionatamente stabile rispetto al parametro K , infatti esso è asintoticamente stabile solo in un certo intervallo di valori di K . Se K supera il valore limite

$$K^* = \frac{(a+b)ab}{\alpha}$$

il sistema diviene instabile.

In particolare, per $K=K^*$ il sistema ha la seguente tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & ab \\ s^2 & a+b & (a+b)ab \\ s^1 & 0 & \\ s^0 & (a+b)ab & \end{array}$$

Pertanto il sistema presenta un polo reale negativo, corrispondente alla prima permanenza nella tabella di Routh, e due poli che si ottengono dall'equazione ausiliaria (la riga s^1 si annulla):

$$(a+b)s^2 + (a+b)ab = 0$$

ossia

$$s^2 + ab = 0$$

che ha soluzioni in

$$s = \pm j\omega^*$$

con pulsazione naturale delle radici in

$$\omega^* = \sqrt{ab}.$$

Dunque per $K=K^*$ il sistema è semplicemente stabile e in risposta ad un ingresso convergente a zero si instaurano delle oscillazioni periodiche di pulsazione ω^*

(risposta limitata). Inoltre per tale valore del guadagno il sistema in anello chiuso non è stabile BIBO.

L'utilizzo del criterio di Routh permette dunque di determinare anche la pulsazione delle oscillazioni periodiche che si instaurano nel sistema retroazionato in corrispondenza dei valori limite dei parametri per quanto riguarda la stabilità.

STABILITÀ RELATIVA

Utilizzando il criterio di Routh è anche possibile determinare, in un sistema asintoticamente stabile, quanto lontane dall'asse immaginario siano le radici dell'equazione caratteristica, fornendo una fondamentale indicazione sui limiti di stabilità.

Nei sistemi reali, infatti, le variazioni parametriche dovute all'invecchiamento dei materiali o a variazioni ambientali (si pensi alle derive di temperature dei componenti dei circuiti elettrici ed elettronici) portano a richiedere che un sistema non solo sia asintoticamente stabile, ma anche che i suoi poli siano sufficientemente lontani dall'asse immaginario, sì che a seguito di variazioni parametriche il sistema, pur potendosi i poli avvicinare all'asse immaginario, resti asintoticamente stabile.

Si consideri ad esempio il sistema con equazione caratteristica:

$$s^3 + 5s^2 + 8s + 6 = 0.$$

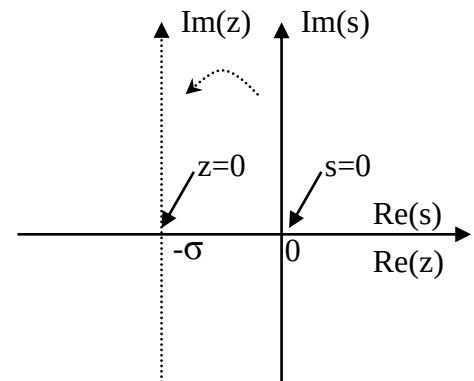
La tabella di Routh associata al sistema è la seguente.

s^3	1	8
s^2	5	6
s^1	$34/5$	
s^0	6	

La tabella di Routh presenta tre permanenze sulla prima colonna, dunque il sistema è asintoticamente stabile.

Supponiamo che una specifica aggiuntiva sia che il sistema abbia radici non solo tutte a parte reale negativa, ma in particolare con parte reale inferiore o uguale a $-\sigma$ ($\sigma > 0$).

È sufficiente cambiare l'origine degli assi e posizionarla nel punto $(-\sigma, 0)$, trasladando così verso sinistra l'asse immaginario, e confrontando con il nuovo asse verticale la posizione delle radici.



Si considera dunque la sostituzione

$$z = s + \sigma \Rightarrow s = z - \sigma$$

e si studia il polinomio caratteristico, originariamente nella forma

$$a(s)=0$$

nella nuova forma

$$a(z-\sigma)=0$$

che corrisponde ad un nuovo polinomio caratteristico nella variabile z :

$$a'(z)=0.$$

Studiando la posizione delle radici del polinomio caratteristico $a'(z)$ con il criterio di Routh, si confronta dunque la posizione delle radici del polinomio originario $a(s)$ rispetto all'asse verticale $s=-\sigma$.

Sia, per l'esempio in studio, $\sigma=2$.

Poniamo dunque $z=s+2$, da cui $s=z-2$ (infatti a $s=0$ corrisponde $z=+2$). Sostituiamo nel polinomio caratteristico, ottenendo:

$$(z-2)^3 + 5(z-2)^2 + 8(z-2) + 6 = 0$$

che, dopo semplici passaggi, diviene

$$z^3 - z^2 + 2 = 0.$$

La nuova tabella di Routh è la seguente.

$$\begin{array}{c|cc}
 z^3 & 1 & 0 \\
 z^2 & -1 & 2 \\
 z^1 & 2 & \\
 z^0 & 2 &
 \end{array}$$

$\swarrow^v$ $\swarrow^v$ $\swarrow^p$

La tabella di Routh nel nuovo riferimento presenta due variazioni e una permanenza sulla prima colonna.

Quindi il sistema, che è asintoticamente stabile, presenta una radice reale negativa inferiore a -2 e due radici reali o complesse e coniugate con parte reale compresa tra -2 e 0.

Evidentemente è possibile iterare l'applicazione del metodo per affinare la conoscenza della posizione dei poli del sistema. Ad esempio, si scelga ora per il sistema precedente $\sigma=1$.

Poniamo dunque $z=s+1$, da cui $s=z-1$. Sostituiamo nel polinomio caratteristico, ottenendo:

$$(z-1)^3 + 5(z-1)^2 + 8(z-1) + 6 = 0$$

che, dopo semplici passaggi, diviene

$$z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0.$$

La nuova tabella di Routh è la seguente.

$$\begin{array}{c|cc}
 z^3 & 1 & 1 \\
 z^2 & 2 & 2 \\
 z^1 & 0 & \\
 z^0 & &
 \end{array}$$

$\swarrow^p$

Pertanto la tabella nel nuovo riferimento presenta una permanenza sulla prima colonna e quindi la riga z^1 tutta nulla. Quindi gli altri due poli si ottengono risolvendo l'equazione ausiliaria

$$2z^2 + 2 = 0$$

e quindi valgono

$$z_{1/2} = \pm j$$

ed effettuando la divisione dell'equazione caratteristica per il polinomio z_2+1 si ottiene il terzo polo, disposto in

$$z_3 = -2.$$

Pertanto il sistema, che è asintoticamente stabile, presenta una radice reale negativa inferiore a -1 e due radici complesse e coniugate con parte immaginaria pari a 1 e disposte sull'asse $\text{Re}(z)=0$ (ovvero con $\text{Re}(s)=-1$ e quindi aventi parte reale pari a -1).

In definitiva, essendo per la trasformazione effettuata $s=z-1$, i tre poli del sistema originario valgono:

$$s_{1/2} = -1 \pm j, s_3 = -3.$$

Approfondimenti consigliati:

Capitolo 4 ed esercizi del testo G. Marro, Controlli Automatici, Zanichelli, 2004.

Capitolo 5 del testo A. V. Papadopoulos, M. Prandini, Fondamenti di Automatica. Esercizi, Pearson, 2016.

Capitolo 2 del testo M. Dotoli, M. P. Fanti, MATLAB – Guida al Laboratorio di Automatica, Città Studi, 2008.