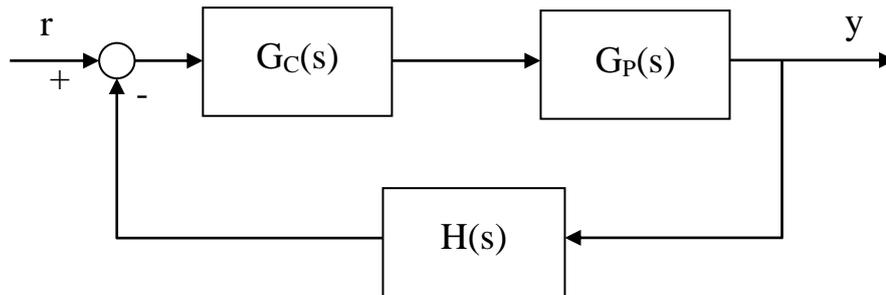


SPECIFICHE DI PROGETTO IN FREQUENZA DI UN SISTEMA DI CONTROLLO

Si consideri il classico esempio di compensazione in cascata riportato in figura, comprendente il plant o sistema controllato con funzione di trasferimento $G_P(s)$, il regolatore con funzione di trasferimento $G_C(s)$ e il trasduttore con funzione di trasferimento $H(s)$.



Nel progetto di un sistema di controllo siffatto, ovvero nella sintesi del controllore $G_C(s)$, il progettista cerca di far sì che il sistema in retroazione complessivo soddisfi alcuni requisiti (specifiche di progetto) riguardanti il suo comportamento dinamico.

Ovviamente, la stabilità asintotica è la prima specifica richiesta in anello chiuso ed è nel seguito data per scontata. Se -infatti- il sistema complessivo non è asintoticamente stabile, il progetto dell'anello di controllo è fallimentare e non ha senso studiare altre specifiche relative al comportamento del sistema.

Le specifiche di progetto di un sistema di controllo possono essere definite sia con riferimento alla dinamica a regime che alla dinamica nel transitorio, e possono riguardare sia il dominio temporale che il dominio frequenziale.

La dinamica a regime del sistema in anello chiuso è essenzialmente caratterizzata dalla precisione del sistema controllato (capacità di un sistema di seguire alcuni segnali di riferimento con il minimo errore): con riferimento alla risposta a ingressi canonici (gradino, rampa, rampa parabolica), perciò, generalmente la precisione richiesta è definita dalla costante di errore (di posizione, di velocità o di accelerazione) o, equivalentemente, dall'errore a regime (di posizione, di velocità o di accelerazione).

Ulteriori specifiche sul comportamento a regime riguardano la precisione in termini di sensibilità ai disturbi e alle variazioni parametriche.

Come è noto, tutte le specifiche sulla precisione a regime, la sensitività parametrica e la reiezione ai disturbi si traducono in indicazioni sul numero di poli della funzione di trasferimento $G_{EQ}(s)$ che permette di definire la funzione di trasferimento dell'errore $G_E(s)$, ovvero in indicazioni sulla costante di guadagno di tale funzione.

Le specifiche sulla dinamica nel transitorio riguardano invece la stabilità relativa e la rapidità di risposta del sistema controllato. Tali specifiche possono essere espresse nel dominio del tempo o in quello della frequenza.

La rapidità del sistema nel dominio del tempo è specificata, oltre che dalla costante di tempo dei poli dominanti, essenzialmente dal tempo di assestamento, che, considerando un tipico sistema in anello chiuso del secondo ordine con poli complessi e coniugati (eventualmente dominanti) aventi coefficiente di smorzamento δ e pulsazione naturale ω_n , vale come è noto:

$$t_{s5\%} = \frac{3}{\delta\omega_n}, \quad t_{s2\%} = \frac{4}{\delta\omega_n}.$$

Ulteriori specifiche di rapidità nel dominio del tempo sono il tempo di picco, che per un sistema del secondo ordine è

$$t_P = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$$

e il tempo di salita, che vale

$$t_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \arccos \delta}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}.$$

Nel dominio della frequenza le specifiche più importanti sono la pulsazione naturale ω_n della coppia di poli complessi e coniugati dominanti o la pulsazione ω_B del polo dominante (pari all'inverso della costante di tempo o al valore del polo preso positivamente), a seconda che il sistema sia del secondo o del primo ordine. Infatti entrambe queste pulsazioni sono legate alla corrispondente costante di tempo τ del sistema, essendo nei due casi (si ricordi che il sistema presenta poli a fase minima):

$$\tau = \frac{1}{\delta\omega_n}, \quad \tau = \frac{1}{\omega_B}$$

e ne deriva che, perché un sistema sia rapido, ossia la sua costante di tempo dominante sia contenuta, la pulsazione di break deve essere sufficientemente elevata.

A tali specifiche si aggiunge la banda passante o larghezza di banda B di cui vediamo prima il significato e poi la definizione.

Come è noto, se il sistema retroazionato è asintoticamente stabile, la risposta in regime permanente del sistema ad un segnale sinusoidale del tipo:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi)$$

vale

$$y(t) = Y \sin(\omega t + \Phi) = |G_0(j\omega)| X \sin(\omega t + \varphi + \angle(G_0(j\omega)))$$

Pertanto si ha

$$Y = |G_0(j\omega)| X$$

ovvero

$$Y_{dB} = |G_0(j\omega)|_{dB} + X_{dB}$$

e

$$\Phi = \angle G_0(j\omega) + \varphi$$

Questi ultimi due risultati indicano chiaramente che, nel passaggio del segnale di ingresso sinusoidale attraverso il sistema lineare, questo ne altera le caratteristiche, filtrandolo, e precisamente modificandone modulo e fase secondo le equazioni precedenti.

In particolare, il segnale in uscita sarà tanto più fedele a quello in ingresso quanto più vicino a zero risulterà la fase ovvero

$$\angle G_0(j\omega) \approx 0$$

e quanto più costante sarà il modulo

$$|G_0(j\omega)|_{dB} \approx |G_0(0)|_{dB}$$

Per molti sistemi lineari esiste solo un intervallo di pulsazioni ω in cui valgono le precedenti relazioni. Questo intervallo di pulsazioni è detto banda passante. Per convenzione la banda passante è data dall'intervallo dei valori di pulsazione per i quali risulta:

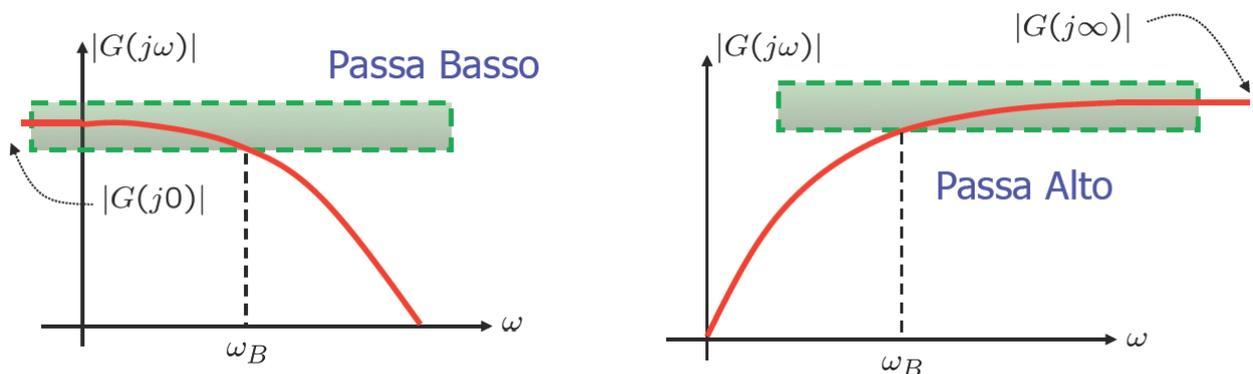
$$|G_0(j\omega)|_{dB} \geq |G_0(j0)|_{dB} - 3dB$$

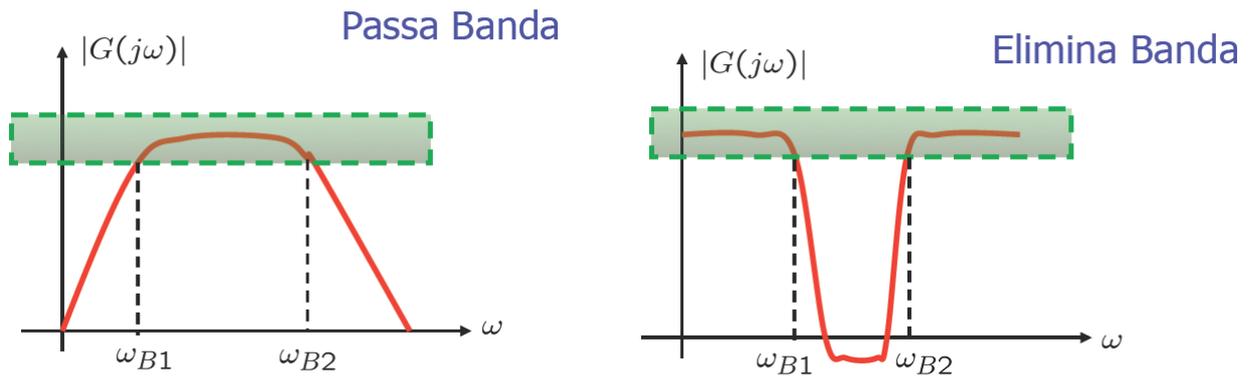
Si tratta dunque di determinare l'intervallo di pulsazioni $[\omega_L, \omega_H]$ (le due pulsazioni sono dette anche pulsazioni di taglio) in cui questa relazione è soddisfatta.

Ogni sistema dinamico agisce sullo spettro delle frequenze in ingresso in modo selettivo. Molti sistemi di interesse fisico possono essere classificati in base al tipo di azione filtrante.

Nel caso più comune (in genere quello di un sistema del secondo ordine, poiché è molto comune la presenza di due poli complessi e coniugati dominanti in anello chiuso) tale intervallo è del tipo $[0, \omega_B]$ ed il sistema è detto di tipo passa basso. In altre parole, il modulo della funzione di risposta armonica tende a diminuire dopo un certo intervallo in cui è quasi costante.

Nelle figure successive sono rappresentati il caso di un sistema passa basso, passa alto, passa banda ed elimina banda.

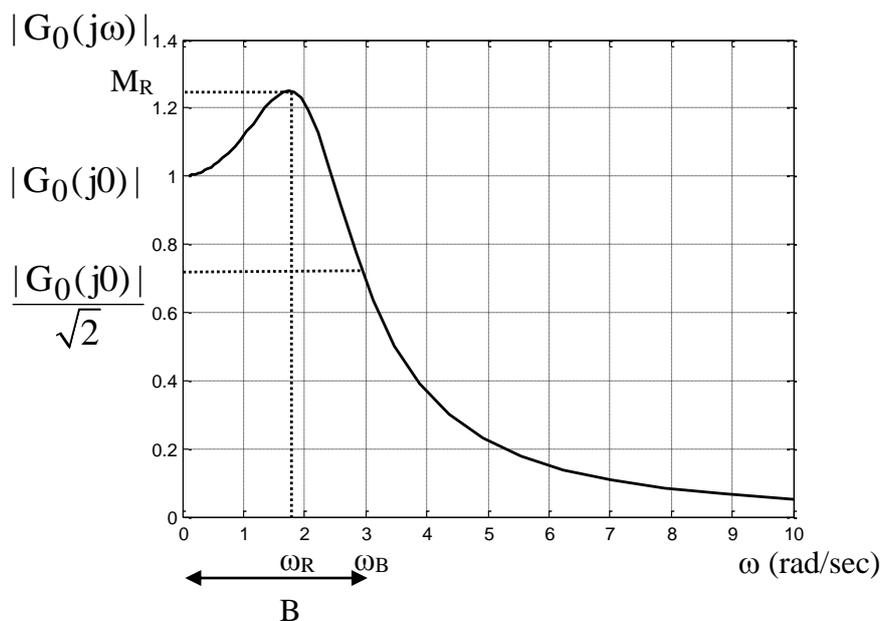




Consideriamo a titolo di esempio l'andamento tipico del modulo effettivo della funzione di risposta armonica di un sistema in retroazione $G_0(s)$, come quello in figura.

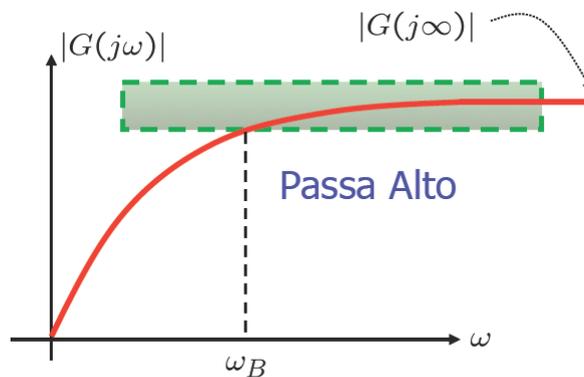
Tale modulo $|G_0(j\omega)|$ presenta generalmente un massimo M_R , detto picco di risonanza, ad una pulsazione ω_R detta anch'essa di risonanza, ed è caratterizzato da una larghezza di banda $B=[0,\omega_B]$ dove indica la pulsazione ω_f alla quale il modulo della risposta armonica è inferiore di 3 dB (corrispondenti ad un rapporto di 1 ad $\frac{1}{\sqrt{2}}$) rispetto al valore statico $G_0(0)$, ossia tale che:

$$|G_0(j\omega_B)| = \frac{|G_0(j0)|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |G_0(j\omega_B)|_{dB} = |G_0(j0)|_{dB} - 3dB.$$



Ragionando analogamente, nel caso di un sistema passa alto la banda è data da un intervallo $[\omega_B, +\infty[$ dove risulta:

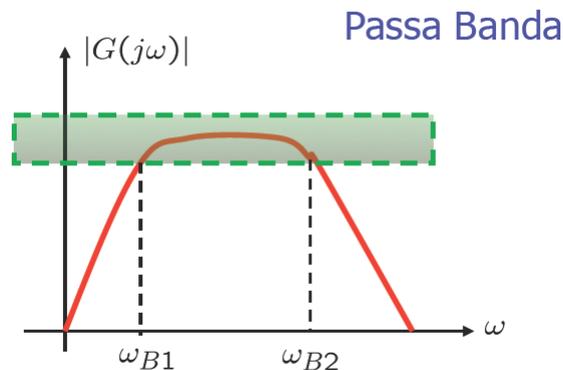
$$|G_0(j\omega_B)| = \frac{\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G_0(j\omega)|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |G_0(j\omega_B)|_{dB} = |G_0(j\infty)|_{dB} - 3dB$$



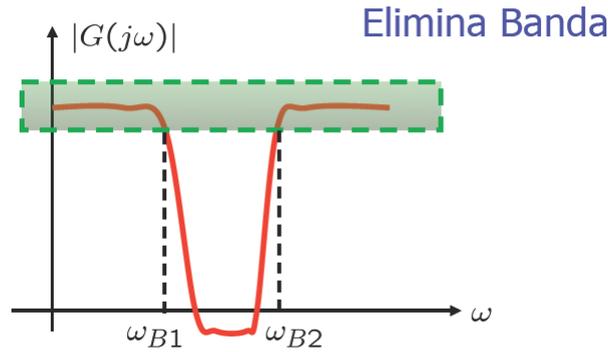
Ancora, nel caso di un sistema passa banda si ha $B=[\omega_{B1}, \omega_{B2}]$ dove risulta:

$$|G_0(j\omega_{B1})| = |G_0(j\omega_{B2})| = \frac{\max(|G_0(j\omega)|)}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$|G_0(j\omega_{B1})|_{dB} = |G_0(j\omega_{B2})|_{dB} = \max(|G_0(j\omega)|_{dB}) - 3dB$$



Infine nel caso di un sistema elimina banda si ha $B=[0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, +\infty[$ dove valgono ancora le due formule precedenti.



La larghezza di banda del sistema B , oltre a definire le capacità filtranti dello stesso, ossia le capacità di reiettare il rumore (che tipicamente comprende armoniche principalmente in alta frequenza), fornisce una indicazione qualitativa del tempo di risposta del sistema in anello chiuso.

È possibile dimostrare che, sia nel caso di un sistema del primo ordine che in quello del secondo ordine la banda passante B è inversamente proporzionale alla costante di tempo τ (che ricordiamo è definita diversamente nel caso di poli complessi e coniugati e nel caso di poli reali in cui la costante di tempo è quella dominante).

Inoltre, la banda passante è anche inversamente proporzionale al tempo di salita t_r del sistema in anello chiuso misurati con riferimento alla risposta al gradino. Infatti si può verificare sperimentalmente che per un generico sistema in anello chiuso risulta:

$$B \cdot t_r \approx 0.4.$$

Dai risultati precedenti consegue che ad una larghezza di banda maggiore corrisponde una maggiore prontezza di risposta del sistema.

Osserviamo inoltre che in genere la banda passante di un sistema in retroazione è maggiore di quella del sistema in anello aperto, il che indica l'effetto benefico della retroazione in termini di prontezza di risposta del sistema.

Tuttavia, nonostante in genere una larghezza di banda maggiore corrisponda un minore tempo di salita, si osserva che non è comunque consigliabile aumentare in modo spropositato la banda passante del sistema in anello chiuso, poiché così facendo si tende a ridurre la robustezza ai disturbi dello stesso. Infatti generalmente il rumore, ossia il disturbo che agisce sulle componenti del ramo di retroazione, ha delle componenti in frequenza che si attestano su valori elevati delle pulsazioni. Dunque le naturali caratteristiche passa basso di un sistema in retroazione, che tagliano cioè i segnali in alta frequenza per via del maggiore numero di poli rispetto agli zeri di

sistema, possono favorire la capacità di reiezione ai disturbi del sistema. Si osserva inoltre che un aumento eccessivo della banda passante fa sì che non sia possibile trascurare le dinamiche in alta frequenza del sistema, ossia considerarne i soli poli dominanti.

Per tali motivi la larghezza di banda richiesta per il sistema in retroazione non deve essere mai troppo elevata.

Ulteriori specifiche correlate alla larghezza di banda e che quindi forniscono degli indici quantitativi della rapidità del sistema sono la pulsazione di crossover di guadagno ω_{CG} , in cui il diagramma di Bode dei moduli della funzione di risposta armonica interseca la retta a 0 dB, e la pulsazione di crossover di fase ω_{CF} , in cui il diagramma di Bode degli argomenti interseca la retta a -180 gradi (si veda la successiva sezione sui margini di stabilità).

Come per la banda passante, anche le pulsazioni di crossover di guadagno e fase devono essere opportunamente elevate.

Come è stato già accennato, con riferimento alle specifiche sul transitorio relative alla stabilità, non si tratta di stabilire se il sistema sia stabile o no, poiché un requisito necessario e implicito del sistema in anello chiuso è proprio la sua asintotica stabilità, quanto piuttosto la misura di quanto soddisfacente sia il suo comportamento dinamico (stabilità relativa).

In altre parole, si tratta di valutare grandezze opportune che misurino quanto il sistema è lontano dalla instabilità, ovvero quantifichino la distanza dei poli dominanti in anello chiuso dall'asse immaginario. Considerando un tipico sistema in anello chiuso del secondo ordine con poli complessi e coniugati (eventualmente dominanti), nel dominio del tempo tali grandezze sono espresse dal coefficiente di smorzamento δ (valori tipici 0.28÷0.7) e dalla massima sovraelongazione percentuale della risposta al gradino (valori tipici corrispondenti 5÷40%):

$$M_P = 100e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}.$$

Infatti, se la massima sovraelongazione percentuale M_P assume un valore molto alto (il coefficiente di smorzamento δ è molto piccolo), le oscillazioni nella risposta indiciale sono eccessive in modulo e tendono a smorzarsi lentamente, dunque la stabilità relativa del sistema può essere insoddisfacente.

Nel dominio della frequenza le specifiche di stabilità relativa vengono espresse in termini di pulsazione e picco di risonanza. In particolare, nel caso di sistema con funzione di trasferimento $G_0(s)$ del secondo ordine con poli complessi e coniugati, è noto che la funzione $|G_0(j\omega)|_{dB}$ presenta un massimo, quando risulta $0 \leq \delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$, nel punto

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

In particolare, il valore del picco di risonanza è

$$M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}, \quad M_R \text{ dB} = -20 \log_{10} \left(2\delta\sqrt{1-\delta^2} \right).$$

Così come sono desiderabili una elevata larghezza di banda e una massima sovraelongazione percentuale contenuta, sono opportune una elevata pulsazione di risonanza e un picco di risonanza contenuto.

Due ulteriori specifiche di stabilità molto importanti sono i margini di stabilità, ossia il margine di guadagno (o margine di ampiezza) e il margine di fase, definiti nel seguito. Il margine di guadagno si esprime in dB ed ha valori tipici di 6÷12dB, mentre il margine di fase si esprime in gradi (o in radianti) con valori tipici di 30÷60 gradi ($\pi/6 \div \pi/3$ radianti). Anche questi indici delle prestazioni del sistema devono essere il più possibile elevati per garantire la stabilità del sistema in anello chiuso in presenza di dinamiche trascurate o perturbazioni di qualsiasi genere, come ad esempio derivate termiche o invecchiamento dei componenti.

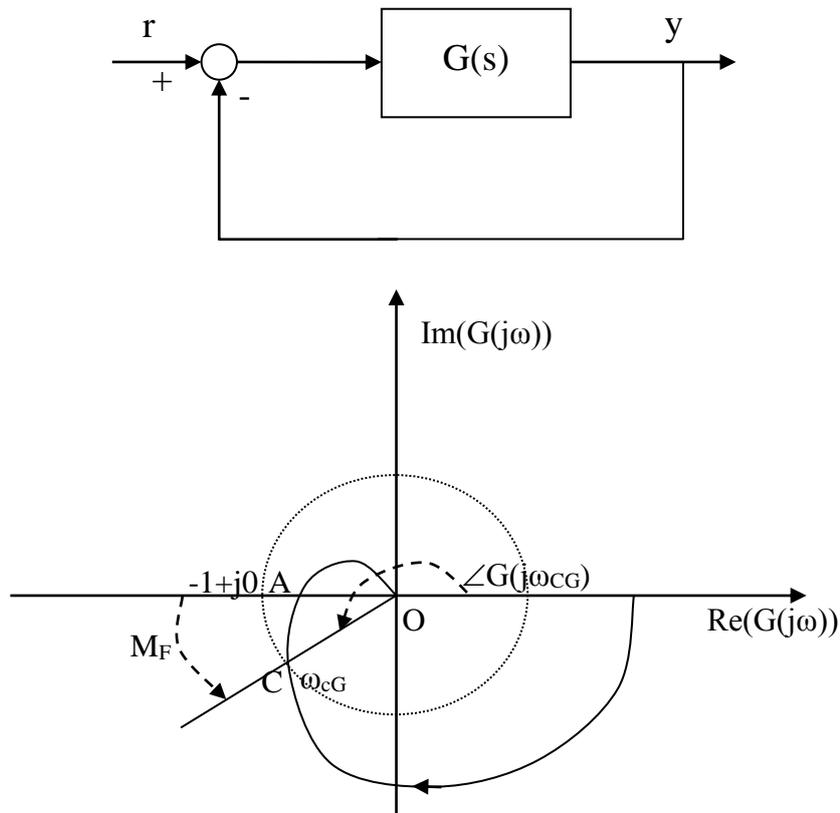
MARGINI DI STABILITÀ

I margini di stabilità sono specifiche che vengono qui definite solo per sistemi con funzione di trasferimento di anello $G(s)$ aventi le seguenti caratteristiche: 1) assenza di poli in anello aperto nel semipiano destro (ossia con $P=0$, secondo la notazione introdotta con il criterio di Nyquist); 2) sistema strettamente proprio (ovvero $m < n$); 3) diagramma polare di Nyquist che interseca al massimo una sola volta il cerchio di raggio unitario (diagramma di Bode delle ampiezze che interseca al massimo una sola volta la retta a 0 dB); 4) diagramma polare di Nyquist che interseca al massimo una sola volta il semiasse reale negativo oltre all'intersezione nell'origine per $\omega \rightarrow +\infty$ (diagramma di Bode delle fasi che interseca al massimo una sola volta la retta a -);

5) modulo della funzione di risposta armonica di anello $|G(j\omega)|$ che è una funzione monotonamente decrescente di ω .

Si noti che $G(s)$ è in generale la funzione di anello, ottenuta anche in presenza di una retroazione non unitaria. Per semplicità, la figura rappresenta il caso di retroazione unitaria.

Nonostante queste proprietà specifichino una classe particolare di funzioni di trasferimento, esse sono godute dalla maggior parte dei sistemi che si incontrano nei campi di applicazione tradizionale dei controlli automatici.



Un diagramma polare tipico di un sistema del genere è rappresentato in figura, dove è messo in evidenza il punto C di intersezione del diagramma con la circonferenza di raggio unitario. Evidentemente in tale punto si ha:

$$|G(j\omega_{cG})|=1, |G(j\omega_{cG})|_{dB}=0 \text{ dB}.$$

Dunque la pulsazione ω_{cG} è la pulsazione precedentemente definita detta di crossover del guadagno, nella quale il diagramma di Bode dei moduli interseca la retta a 0 dB.

$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + \pi$$

ovvero tale che risulti

$$\angle G(j\omega_{CG}) - M_F = -\pi.$$

Pertanto il margine di fase è l'angolo che deve sottrarsi alla fase della funzione di risposta armonica, misurata a partire da $-\pi$ nel valore della pulsazione di crossover di guadagno, per ottenere l'angolo $-\pi$.

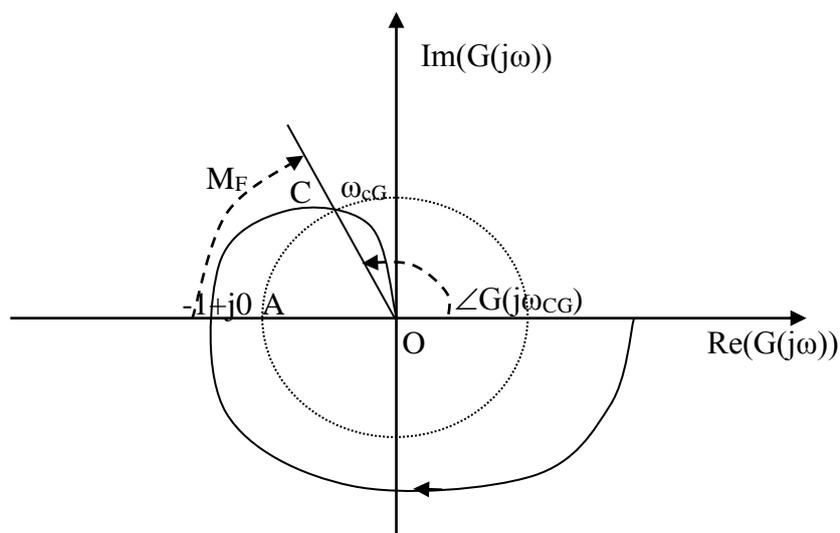
Evidentemente il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se risulta:

$$M_F > 0.$$

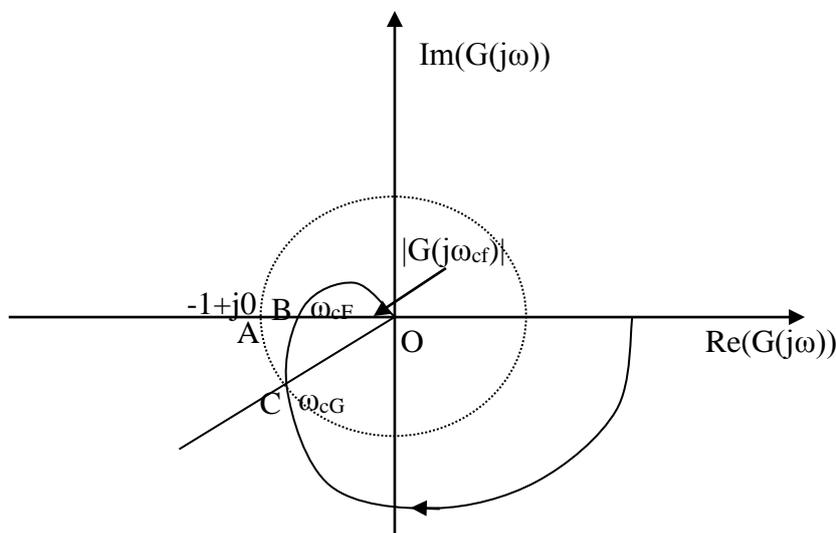
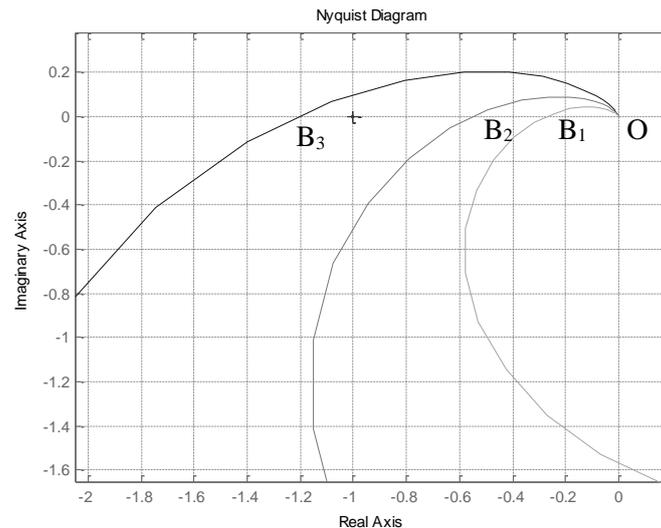
Inoltre, se il margine di fase è negativo allora il sistema è instabile, mentre se esso è nullo allora risulta non solo $|G(j\omega_{CG})|=1$ ma anche $\angle G(j\omega_{CG}) = -\pi$ e quindi il diagramma passa per il punto critico nella pulsazione ω_{CG} , ovvero vi sono dei poli immaginari puri nella funzione di trasferimento in anello chiuso di valore $\pm j\omega_{CG}$.

Ancora, quanto più il margine di fase (positivo) è ampio, tanto maggiore è la stabilità relativa del corrispondente sistema in catena chiusa.

A titolo di esempio, la figura successiva riporta il diagramma di Nyquist di un sistema con margine di fase negativo (ovvero con il punto C disposto nel secondo quadrante) e quindi instabile in anello chiuso.



Consideriamo ora la figura seguente, che riporta, opportunamente ingranditi, ancora i tre diagrammi di Nyquist precedentemente confrontati e ne evidenzia le intersezioni B_i con il semiasse reale negativo. Come per il caso precedente, si vede facilmente che condizione necessaria e sufficiente perché il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile è che l'intersezione B_i si trovi a destra del punto critico $-1+j0$. Ancora, quanto più a destra è tale intersezione tanto più robusta è la stabilità in anello chiuso del sistema.



Detta allora ω_{CF} la pulsazione alla quale il diagramma interseca il semiasse reale negativo, si ha:

$$\angle G(j\omega_{CF}) = -\pi.$$

Si definisce pertanto margine di guadagno o di ampiezza M_A l'inverso della distanza OB (in modo da ottenere un indice il cui valore aumenta all'aumentare della stabilità relativa, come per il margine di fase) espressa in dB (si utilizzano i decibel per maggiore facilità di lettura di tale indice nei diagrammi di Bode):

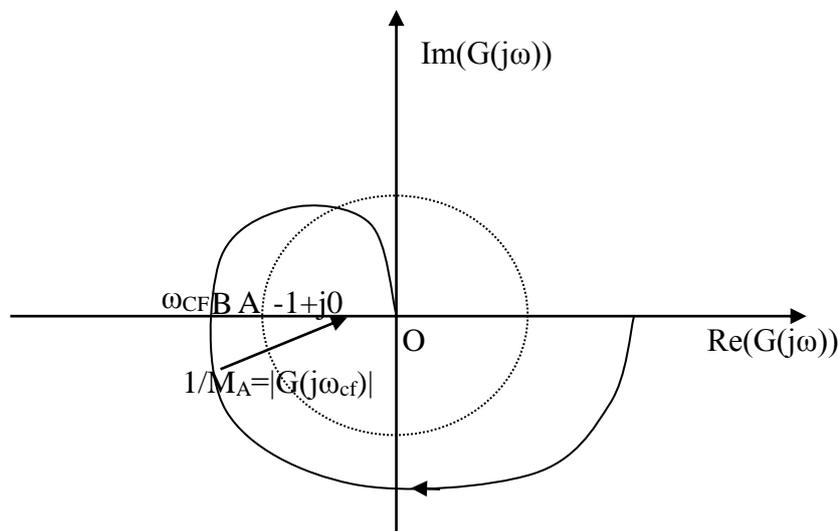
$$M_A = 20 \log_{10} \frac{1}{|G(j\omega_{CF})|} = -20 \log_{10} |G(j\omega_{CF})|$$

In questo caso il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se risulta $OB < 1$, ovvero $1/OB > 1$, ossia:

$$M_A > 0.$$

Inoltre, se il margine di ampiezza è negativo allora il sistema è instabile, mentre se esso è nullo allora risulta non solo $\angle G(j\omega_{CF}) = -\pi$ ma anche $|G(j\omega_{CF})| = 1$ e quindi il diagramma passa per il punto critico nella pulsazione ω_{CF} , ovvero vi sono dei poli immaginari puri nella funzione di trasferimento in anello chiuso di valore $\pm j\omega_{CF}$.

A titolo di esempio, la figura successiva riporta il diagramma di Nyquist di un sistema con margine di ampiezza negativo (ovvero con $1/OB < 1$ cioè $OB > 1$ e quindi con il punto B disposto a sinistra del punto critico A) e dunque instabile in anello chiuso.

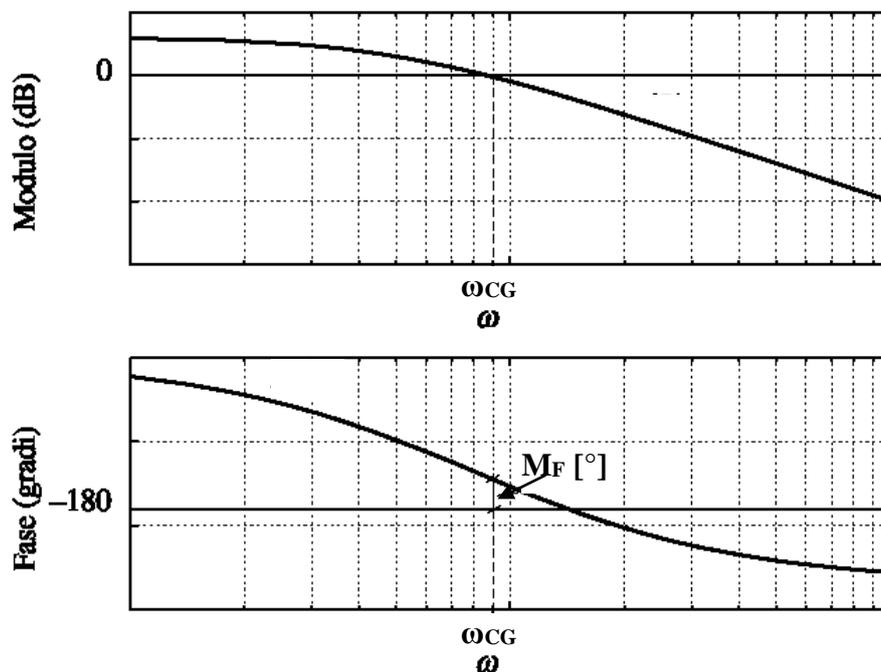


Come per il margine di fase, quanto più il margine di ampiezza (positivo) è ampio, tanto maggiore è la stabilità relativa del corrispondente sistema in catena chiusa.

In particolare, il criterio di Bode afferma che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se i margini di stabilità sono entrambi positivi. Equivalentemente, il criterio di Bode afferma che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se il guadagno di anello in dB nella pulsazione di crossover di fase è negativo (minore di 1 in termini effettivi) e il margine di fase è positivo.

Osserviamo che i margini di fase e di guadagno si possono agevolmente misurare sui diagrammi di Bode.

La pulsazione ω_{CG} di crossover del guadagno, essendo la pulsazione alla quale il modulo è unitario, corrisponde all'intersezione del diagramma di Bode dei moduli con la retta a 0 dB.

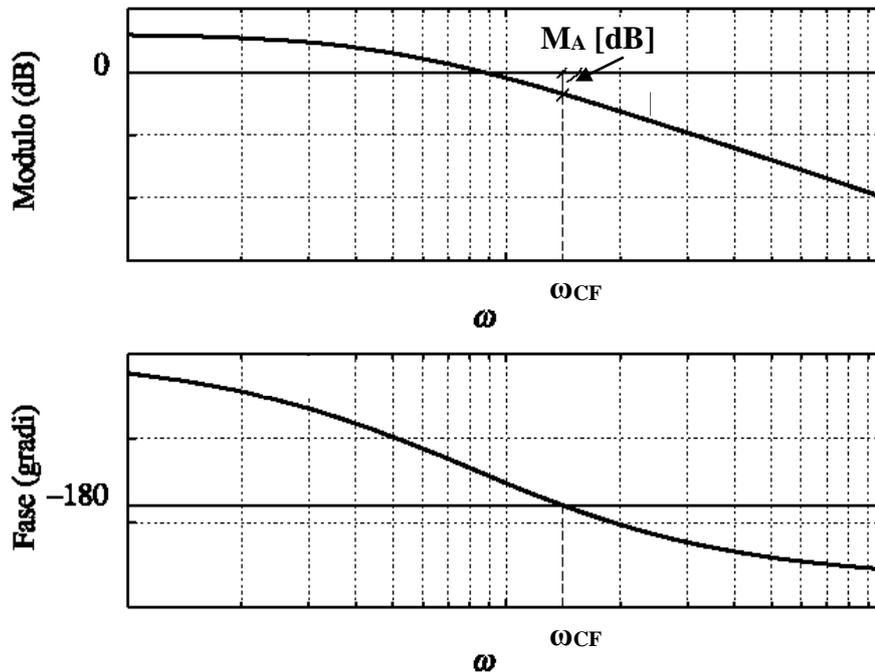


In corrispondenza del valore di pulsazione ω_{CG} è quindi possibile leggere il margine di fase M_F direttamente dal diagramma di Bode delle fasi. Si ha infatti:

$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + 180^\circ = \angle G(j\omega_{CG}) - (-180^\circ).$$

In altre parole, il margine di fase M_F espresso in gradi (radianti) è la distanza fra l'ordinata di fase (misurata in gradi) del punto di pulsazione ω_{CG} e la retta a -180° ($-\pi$). Il suo segno è positivo se, come nel caso in figura, il punto di ascissa ω_{CG} ha ordinata maggiore di -180° ($-\pi$), è negativo in caso contrario.

Per quanto riguarda il margine di guadagno, la pulsazione ω_{CF} di crossover delle fasi, essendo la pulsazione alla quale la fase vale -180° , corrisponde all'intersezione del diagramma di Bode delle fasi con la retta a -180 gradi.



In corrispondenza del valore di pulsazione ω_{CF} è quindi possibile leggere il margine di ampiezza M_A in dB direttamente dal diagramma di Bode dei moduli:

$$M_A = 20 \log_{10} \frac{1}{|G(j\omega_{CF})|} = -20 \log_{10} |G(j\omega_{CF})| = 0 - |G(j\omega_{CF})|_{dB}.$$

In altre parole, il margine di ampiezza M_A espresso in decibel è l'opposto del modulo in decibel valutato sul diagramma di Bode delle ampiezze nel punto di pulsazione ω_{CF} , ossia la distanza, in dB, tra la retta a 0 dB e l'ordinata del punto di ascissa ω_{CF} . Il suo segno è positivo se, come nel caso in figura, il punto di ascissa ω_{CF} ha ordinata inferiore a 0 dB, è negativo altrimenti.

Osserviamo inoltre che i sistemi considerati sono asintoticamente stabili se e solo se risulta $\omega_{CG} < \omega_{CF}$, e una misura alternativa a M_F e M_A del margine di stabilità è quindi data proprio dalla differenza $\omega_{CF} - \omega_{CG}$.

Consideriamo ora il caso di un sistema con ritardo puro. Per fissare le idee facciamo riferimento al caso del laminatoio, in cui la funzione di trasferimento del gruppo misuratore-amplificatore-motore riduttore è la seguente:

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + T_m s)},$$

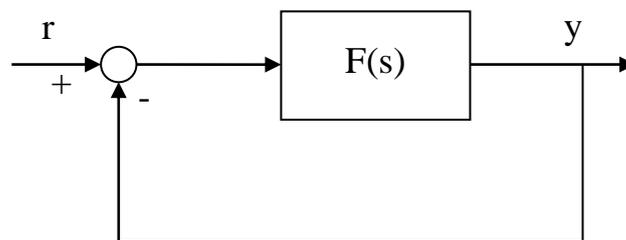
mentre per via del ritardo puro la funzione di trasferimento di anello è:

$$F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{s(1 + T_m s)},$$

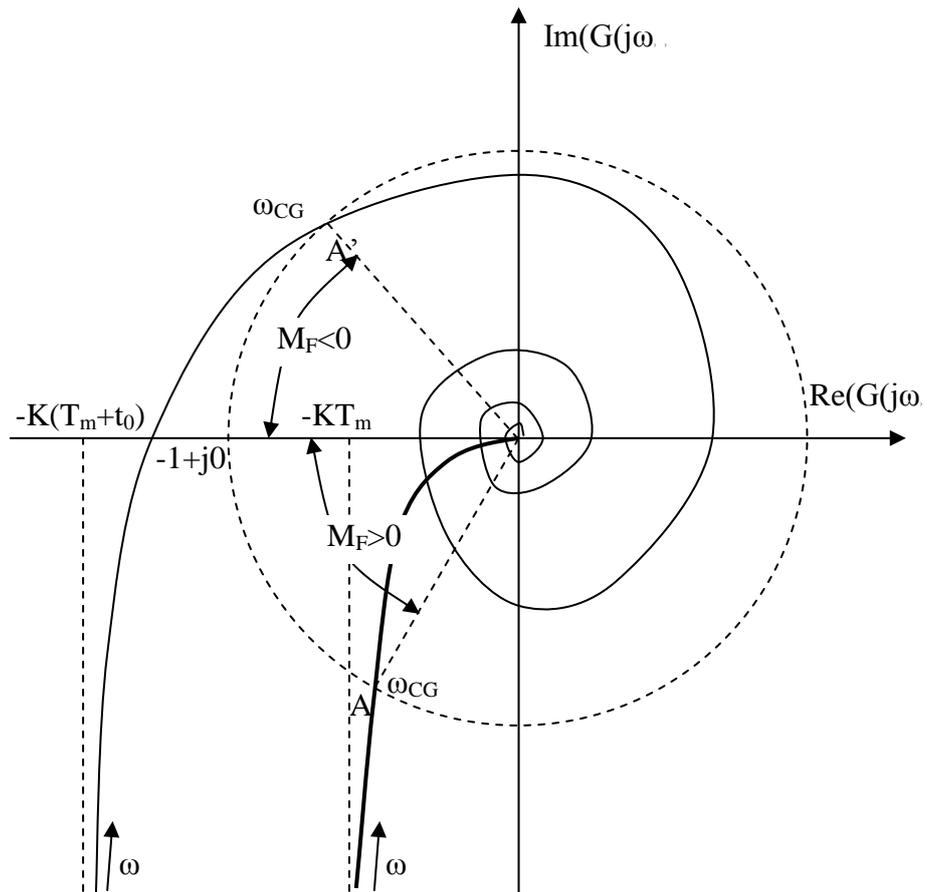
con

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + T_m j\omega)}, \quad F(j\omega) = \frac{K e^{-t_0 j\omega}}{j\omega(1 + T_m j\omega)}.$$

In definitiva, il sistema equivale al sistema a blocchi rappresentato in figura.



Il Diagramma di Nyquist del sistema senza ritardo finito, cioè quello della funzione $G(j\omega)$, è del tipo indicato con A nella figura seguente, mentre assume l'andamento indicato con A' quando è presente il ritardo puro, ossia se si considera la funzione $F(j\omega)$.



È noto che la presenza di un ritardo puro in una anello di controllo può destabilizzare un sistema, soprattutto per valori elevati del tempo morto. Ciò avviene proprio nell'esempio riportato nella figura precedente, per il quale l'intersezione del diagramma di Nyquist con il cerchio di raggio unitario passa, per via del ritardo, dal terzo al secondo quadrante e l'intersezione del diagramma di Nyquist con il semiasse reale negativo si sposta dalla destra del punto critico a sinistra dello stesso. È immediato concludere che il margine di fase M_F della funzione $G(j\omega)$ è il massimo ritardo addizionale di fase che il sistema può tollerare senza che esso perda la sua caratteristica di asintotica stabilità. Infatti si ha:

$$|F(j\omega)| = |G(j\omega)| \Rightarrow \omega_{CG}(F(j\omega)) = \omega_{CG}(G(j\omega))$$

ossia le due funzioni hanno la stessa pulsazione di crossover dei guadagni. Inoltre si ha:

$$\angle F(j\omega) = \angle G(j\omega) - t_0\omega$$

e poiché le due funzioni hanno la stessa pulsazione di crossover dei guadagni si ha anche:

$$M_F(F(j\omega)) = M_F(G(j\omega)) - t_0\omega_{CG}.$$

Imponendo che il margine di fase del sistema in anello chiuso con ritardo sia positivo o al massimo nullo (cioè che il sistema sia asintoticamente stabile o semplicemente stabile) si ha quindi:

$$M_F(F(j\omega)) = M_F(G(j\omega)) - t_0\omega_{CG} \geq 0 \Rightarrow t_0 \leq \frac{M_F(G(j\omega))}{\omega_{CG}}.$$

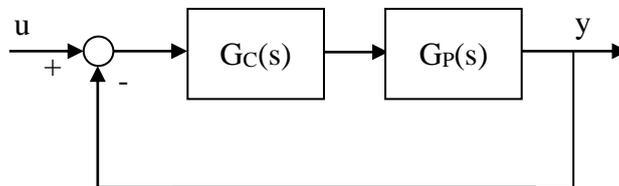
Pertanto un valore del ritardo puro superiore a quello critico determinato porta il sistema in retroazione alla instabilità, anche se il sistema privo di ritardo è asintoticamente stabile in anello chiuso.

ESEMPIO

Con riferimento alla figura, sia:

$$G_C(s) = 5, \quad G_P(s) = \frac{1}{s(s+2)}.$$

Si determinino il picco di risonanza M_r e la pulsazione di risonanza ω_r del sistema. Si determini quindi la banda passante B del sistema. Infine si calcolino le pulsazioni di crossover di guadagno ω_{CG} e di fase ω_{CF} e i margini di fase M_F e di ampiezza M_A del sistema.



La funzione di trasferimento di anello vale:

$$G(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{5}{s(s+2)},$$

quindi la funzione di trasferimento in anello chiuso è:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{5}{s^2 + 2s + 5} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2},$$

ovvero il sistema in anello chiuso è un sistema del secondo ordine nella forma standard con pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{5}$, $\delta = \frac{1}{\sqrt{5}} \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, per cui la risposta in frequenza presenta un picco di risonanza.

Si ha:

$$G_0(j\omega) = \frac{5}{5 - \omega^2 + 2j\omega},$$

$$|G_0(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{(5 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}} = \frac{5}{\sqrt{25 - 6\omega^2 + \omega^4}}.$$

Determiniamo la pulsazione di risonanza, alla quale il modulo della funzione di risposta armonica è massimo, annullando la derivata del modulo.

$$\frac{d|G_0(j\omega)|}{d\omega} = -5 \frac{(-12\omega + 4\omega^3)}{(25 - 6\omega^2 + \omega^4) \cdot 2\sqrt{25 - 6\omega^2 + \omega^4}} = 0$$

da cui

$$-12\omega + 4\omega^3 = 0 \Rightarrow \omega^2 - 3 = 0 \Rightarrow \omega_R = \sqrt{3} \text{ rad/s} \approx 1.707 \text{ rad/s}.$$

In corrispondenza di tale pulsazione si ottiene il massimo del modulo della funzione di risposta armonica, ossia proprio il picco di risonanza:

$$M_R = |G_0(j\omega_R)| = \frac{5}{\sqrt{25 - 6\omega_R^2 + \omega_R^4}} = \frac{5}{\sqrt{25 - 18 + 9}} = \frac{5}{4} = 1.25,$$

che in dB vale:

$$M_R|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{5}{4} \right) \approx 1.94 \text{ dB}.$$

Ovviamente tali risultati si sarebbero anche potuti determinare ricordando che per un sistema del secondo ordine come quello in esame risulta:

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}, \quad M_R|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{2\delta \sqrt{1 - \delta^2}}.$$

Sostituendo alle precedenti relazioni i valori $\omega_n = \sqrt{5}$ e $\delta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ si ottengono nuovamente i risultati precedentemente determinati.

La banda passante del sistema $B = \omega_f$ indica la pulsazione ω_f alla quale il modulo della risposta armonica è inferiore di 3 dB (corrispondenti ad un rapporto di 1 ad $\frac{1}{\sqrt{2}}$) al valore statico $G_0(0)$, ossia tale che:

$$|G_0(j\omega_f)| = \frac{|G_0(j0)|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |G_0(j\omega_f)|_{dB} = |G_0(j0)|_{dB} - 3 \text{ dB}.$$

In questo caso si ha:

$$|G_0(0)| = 1.$$

Dunque deve essere:

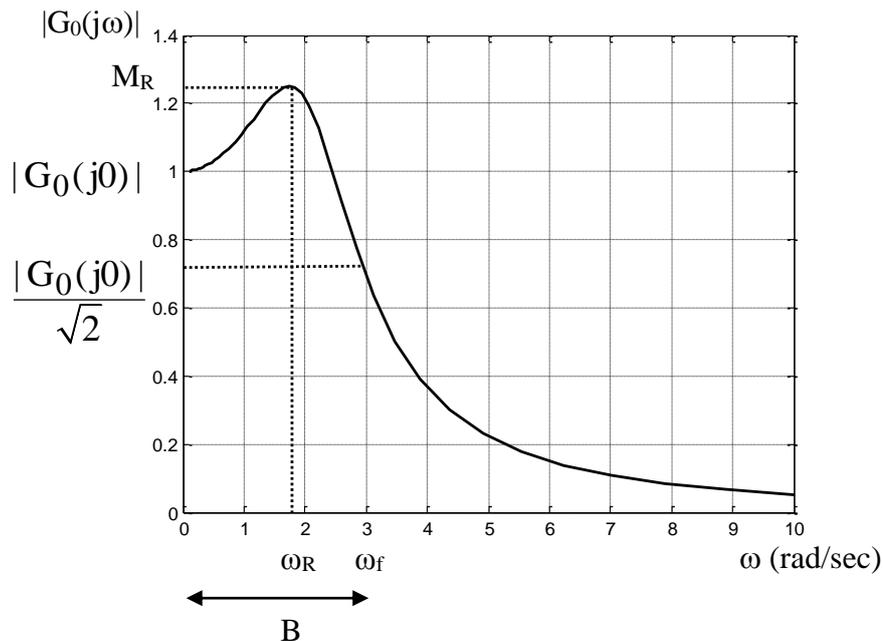
$$\frac{5}{\sqrt{25 - 6\omega^2 + \omega^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 25 - 6\omega^2 + \omega^4 = 50 \Rightarrow \omega^4 - 6\omega^2 - 25 = 0.$$

Ponendo $\omega^2 = t$ e risolvendo per t si ha:

$$t^2 - 6t - 25 = 0 \Rightarrow t = 3 + \sqrt{9 + 25} \approx 8.83 \Rightarrow \omega_f = \sqrt{8.83} \approx 2.97 \left[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \right].$$

Si ha quindi una banda $B=2.97 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ o $f=B/(2\pi)=0.47 \text{ Hz}$.

In figura sono rappresentati la pulsazione e il picco di risonanza e la banda passante del sistema.



Calcoliamo ora la pulsazione di crossover di guadagno ω_{CG} del sistema. Si ha:

$$|G(j\omega_{CG})|=1,$$

ossia si cerca la pulsazione alla quale la funzione di risposta armonica in anello aperto ha modulo unitario. Si ha:

$$G(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega + 2)} = \frac{5}{-\omega^2 + 2j\omega},$$

da cui

$$|G(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{\omega^4 + 4\omega^2}} = 1 \Rightarrow \omega^4 + 4\omega^2 = 25 \Rightarrow \omega^4 + 4\omega^2 - 25 = 0.$$

Ponendo $\omega^2=t$ e risolvendo per t si ha:

$$t^2 + 4t - 25 = 0 \Rightarrow t = -2 + \sqrt{4 + 25} \simeq 3.38 \Rightarrow \omega_{CG} = \sqrt{3.38} \simeq 1.84 \left[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \right].$$

Si ha quindi una pulsazione di crossover del guadagno $\omega_{CG} = 1.84 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Il margine di fase vale quindi:

$$M_F = \sphericalangle G(j\omega_{CG}) + \pi.$$

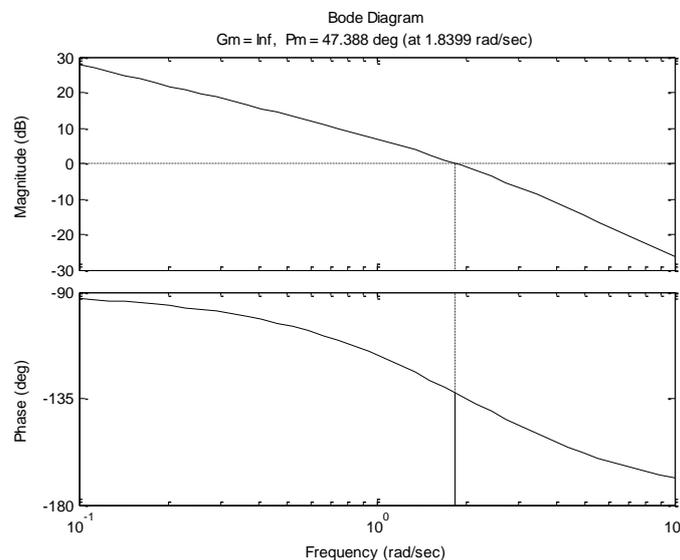
Essendo

$$\sphericalangle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

si ha in definitiva

$$M_F = \sphericalangle G(j\omega_{CG}) + \pi = -\frac{\pi}{2} - \arctg(0.5\omega_{CG}) + \pi \simeq 0.827 \text{ rad } (47.3^\circ).$$

Evidentemente, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, essendo il margine di fase positivo. Inoltre tale margine di stabilità è notevolmente elevato.



Dai diagrammi di Bode si osserva anche una particolarità interessante del sistema. Poiché la fase non è mai al di sotto della retta a -180° , si ha che la pulsazione di crossover di fase ω_{CF} vale $+\infty$. In tal caso la distanza tra il diagramma di Bode delle

ampiezze e la retta a 0 dB è infinita, dunque il margine di ampiezza M_A del sistema è $+\infty$, confermando le caratteristiche di grande stabilità del sistema in anello chiuso. Del resto, la pulsazione di crossover di fase deve soddisfare l'equazione:

$$\angle G(j\omega_{CF}) = -\pi$$

ovvero

$$-\pi = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_{CF}}{2}\right)$$

da cui

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_{CF}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$\omega_{CF} = +\infty.$$

Si ha dunque:

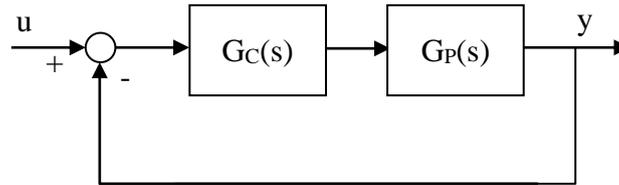
$$M_A = 20 \log_{10} \frac{1}{|G(j\omega_{CF})|} = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{\omega^4 + 4\omega^2}}{5} \Bigg|_{\omega \rightarrow +\infty} = 20 \log_{10}(+\infty) = +\infty$$

che conferma quanto si determina graficamente dai diagrammi di Bode.

ESEMPIO

Con riferimento alla figura, sia:

$$G_C(s) = \frac{25}{3}, \quad G_P(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s(1+0.05s)^2}.$$



Si supponga inizialmente $\tau=0$ e si individuino le pulsazioni di crossover di guadagno ω_{CG} e di fase ω_{CF} e i margini di fase M_F e di ampiezza M_A del sistema. Si calcoli quindi il massimo valore del ritardo puro τ per il quale il sistema è stabile.

Per $\tau=0$ la funzione di trasferimento di anello vale:

$$G(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{25}{3} \cdot \frac{1}{s(1+0.05s)^2},$$

quindi

$$G(j\omega) = \frac{25}{3} \cdot \frac{1}{j\omega(1+0.05j\omega)^2}.$$

Calcoliamo ora la pulsazione di crossover di guadagno ω_{CG} del sistema. Si ha:

$$|G(j\omega_{CG})| = 1,$$

ossia si cerca la pulsazione alla quale la funzione di risposta armonica in anello aperto ha modulo unitario.

Si ha

$$|G(j\omega)| = \frac{25}{3} \cdot \frac{1}{\omega \left(1 + \frac{1}{400}\omega^2\right)} = 1 \Rightarrow 3\omega^3 + 1200\omega - 10000 = 0.$$

Tale equazione si può risolvere per approssimazioni successive esplicitando il valore dell'incognita come segue:

$$\omega = \frac{10000 - 3\omega^3}{1200}$$

e sostituendo al secondo membro un valore di prova per la pulsazione si determina un secondo valore per la stessa. Si sostituisce quest'ultimo ancora a secondo membro e si itera sino a giungere a convergenza. Nel nostro caso si giunge in pochi passi ad una soluzione con il valore di prova iniziale della pulsazione $\omega=1 \text{ rad s}^{-1}$ (dove tale valore di prova è scelto sulla base dell'andamento del diagramma di Bode delle ampiezze asintotico, che interseca l'asse a 0 dB nella decade 1-10 rad):

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 1.00; \\ \omega_2 &= 8.33; \\ \omega_3 &= 6.89; \\ \omega_4 &= 7.52; \\ \omega_5 &= 7.27; \\ \omega_6 &= 7.37; \\ \omega_7 &= 7.33; \\ \omega_8 &= 7.34; \\ \omega_9 &= 7.34.\end{aligned}$$

Dunque la soluzione reale dell'equazione precedente (che in generale è del terzo ordine e dunque ha tre soluzioni) è:

$$\omega_{CG} \approx 7.34 \left[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \right].$$

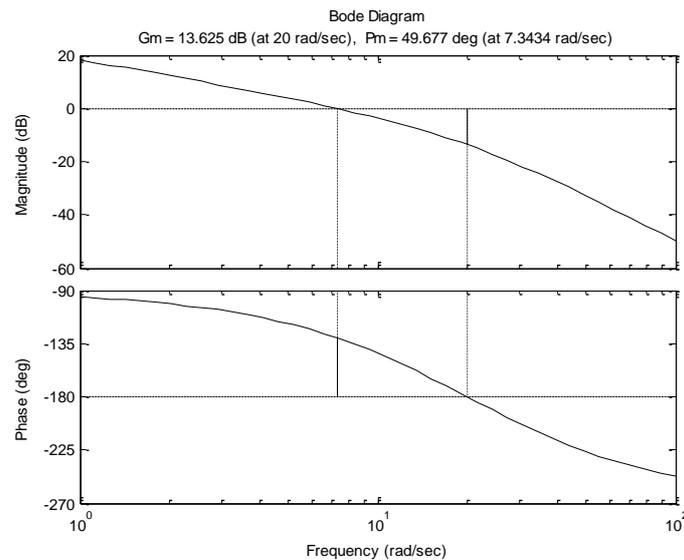
Il margine di fase vale quindi:

$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + \pi = -\frac{\pi}{2} - 2\text{arctg}(0.05\omega_{CG}) + \pi \approx 0.87 \text{ rad } (49.7^\circ).$$

Evidentemente, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, essendo il margine di fase positivo. Inoltre tale margine di stabilità è notevolmente elevato.

Calcoliamo ora la pulsazione ω_{CF} alla quale il diagramma interseca il semiasse reale negativo, imponendo:

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega_{CF}) = -\pi &\Rightarrow -\frac{\pi}{2} - 2\text{arctg}(0.05\omega_{CF}) = -\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\text{arctg}(0.05\omega_{CF}) &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0.05\omega_{CF} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \omega_{CF} = 20 \text{ rad/s}\end{aligned}$$



Determiniamo quindi il margine di guadagno M_A .

$$M_A = 20 \log_{10} \frac{1}{|G(j\omega_{CF})|} = 20 \log_{10} \left(\frac{3}{25} \cdot \omega_{CF} \left(1 + \frac{1}{400} \omega_{CF}^2 \right) \right) =$$

$$= 20 \log_{10} \left(\frac{3}{25} \cdot 40 \right) = 20 \log_{10} 4.8 \approx 13.63 \text{ dB}$$

Poiché il margine di ampiezza M_A del sistema in dB è positivo, è confermata la asintotica stabilità del sistema in anello chiuso.

Sia ora il caso $\tau \neq 0$. La nuova funzione di risposta armonica in anello aperto vale

$$F(j\omega) = \frac{25}{3} \cdot \frac{e^{-j\tau\omega}}{j\omega(1+0.05j\omega)^2}$$

La pulsazione di crossover dei guadagni è invariata:

$$|F(j\omega)| = |G(j\omega)| \Rightarrow \omega_{CG}(F(j\omega)) = \omega_{CG}(G(j\omega)) \approx 7.34 \text{ rad/s}$$

La fase della funzione di risposta armonica è ora:

$$\angle F(j\omega) = \angle G(j\omega) - \tau\omega = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctg(0.05\omega_{CF}) - \tau\omega$$

Il nuovo margine di fase vale quindi:

$$M_F(F(j\omega)) = M_F(G(j\omega)) - \tau\omega_{CG} = 0.87 - 7.34\tau.$$

Dunque il massimo valore del ritardo puro ammissibile si ottiene imponendo che il margine di fase del sistema in anello chiuso sia positivo o al massimo nullo (cioè che il sistema sia asintoticamente stabile o semplicemente stabile). Si ha quindi:

$$M_F(F(j\omega)) \geq 0 \Rightarrow \tau \leq \frac{0.87}{7.34} \approx 0.1185s.$$

ESEMPIO

Per il sistema chiuso in retroazione unitaria negativa con guadagno di anello:

$$G(s) = \frac{K}{(1+s)^2}, \quad K > 0,$$

si determini il valore del parametro K in modo che il margine di fase valga $M_F=50^\circ$. Per tale valore di K si determini quindi la massima sovralongazione percentuale M_P della risposta indiciale ed il picco di risonanza M_R .

Si ha:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)^2},$$

quindi

$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + 180^\circ = -2\arctg(\omega_{CG}) + 180^\circ = 50^\circ,$$

da cui

$$\omega_{CG} = \operatorname{tg}65^\circ \approx 2.14\text{rad/s}.$$

In tale pulsazione il diagramma di Bode dei moduli deve intersecare la retta a 0 dB, cioè deve essere:

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$|G(j\omega_{CG})| = \frac{K}{1 + \omega_{CG}^2} = 1,$$

da cui

$$K = 1 + \omega_{CG}^2 = 1 + 2.14^2 \approx 5.58.$$

Con questo valore del guadagno la funzione di trasferimento in anello chiuso vale:

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + 1 + K} = \frac{5.58}{s^2 + 2s + 6.58} = \frac{5.58}{6.58} \frac{6.58}{s^2 + 2s + 6.58} = K' \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ossia ha guadagno non unitario $K' = 5.58/6.58 \approx 0.85$.

Dalla funzione di trasferimento in anello chiuso si deduce che i poli in anello chiuso hanno pulsazione naturale

$$\omega_n = \sqrt{6.58} \approx 2.57 \text{ rad/s}$$

e coefficiente di smorzamento

$$\delta = \frac{2}{2\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{6.58}} \approx 0.39.$$

Dunque la massima sovraelongazione percentuale della risposta al gradino vale:

$$M_P = 100e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 100e^{-\frac{0.39\pi}{\sqrt{1-0.39^2}}} \approx 26.4\%,$$

che è un valore tipico perché compreso nell'intervallo 5÷40%. Si osservi che è stato possibile utilizzare la formula determinata per i sistemi del secondo ordine con guadagno unitario anche in questo caso (in cui il guadagno è 5.58/6.68), poiché la massima sovraelongazione percentuale non è una specifica assoluta, ma fornisce una misura relativa e raffrontata al valore finale della risposta al gradino.

La pulsazione e il picco di risonanza possono determinarsi o annullando la derivata del modulo della funzione di risposta armonica in anello chiuso o più semplicemente ricordando che per un sistema in anello chiuso del secondo ordine con poli complessi e coniugati e privo di zeri si ha un picco di risonanza quando la funzione $|G_0(j\omega)|_{dB}$

presenta un coefficiente di smorzamento $0 \leq \delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (è il nostro caso, poiché $\delta=0.39$) con formule note. La pulsazione di risonanza vale

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2} = 2.57 \sqrt{1 - 2 \cdot 0.39^2} \approx 2.14 \text{ rad/s}.$$

Poiché il guadagno statico in anello chiuso non è 1 ma vale $K' = 5.58/6.58 \approx 0.85$, il valore del picco di risonanza (che non è una misura relativa come la massima sovraelongazione percentuale, ma è una specifica assoluta) è in questo caso pari a:

$$M_R = \frac{5.58}{6.58} \cdot \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} = \frac{5.58}{6.58} \cdot \frac{1}{2 \cdot 0.39\sqrt{1-0.39^2}} \approx 1.18,$$

che in dB vale

$$M_R = 20 \log_{10} 1.18 \approx 1.4 \text{ dB}.$$

ESEMPIO

Per il sistema chiuso in retroazione unitaria negativa con guadagno di anello:

$$G(s) = \frac{K}{s(1+0.5s)^2}, \quad K > 0,$$

si determini il valore del parametro K in modo che il margine di ampiezza valga $M_A = 6 \text{ dB}$. Per tale valore di K si determini quindi la funzione di trasferimento in anello chiuso, l'errore di velocità del sistema e il suo margine di fase.

Si ha:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+0.5j\omega)^2},$$

quindi

$$M_A = 20 \log_{10} \frac{1}{|G(j\omega_{CF})|} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{K} \cdot \omega_{CF} \left(1 + \frac{1}{4} \omega_{CF}^2 \right) \right) = 6 \text{ dB} \approx 20 \log_{10} 2,$$

da cui

$$\frac{1}{K} \cdot \omega_{CF} \left(1 + \frac{1}{4} \omega_{CF}^2 \right) = 2$$

ovvero

$$K = \frac{\omega_{CF}}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \omega_{CF}^2 \right).$$

Calcoliamo ora la pulsazione ω_{CF} alla quale il diagramma interseca il semiasse reale negativo, imponendo:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega_{CF}) = -\pi &\Rightarrow -\frac{\pi}{2} - 2 \arctg(0.5\omega_{CF}) = -\pi \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \arctg(0.5\omega_{CF}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0.5\omega_{CF} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \omega_{CF} = 2 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Determiniamo quindi il parametro K:

$$K = \frac{\omega_{CF}}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \omega_{CF}^2 \right) = 1 \left(1 + \frac{1}{4} 4 \right) = 2.$$

Con questo valore del guadagno la funzione di trasferimento in anello chiuso vale:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(1+0.5s)^2 + K} = \frac{K}{\frac{1}{4}s^3 + s^2 + s + K} = \frac{4K}{s^3 + 4s^2 + 4s + 4K} = \frac{8}{s^3 + 4s^2 + 4s + 8}.$$

Inoltre la funzione di trasferimento in anello aperto è

$$G(s) = \frac{2}{s(1+0.5s)^2}$$

con una costante di velocità

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{(1+0.5s)^2} = 2$$

e in conclusione l'errore di velocità vale $1/K_V=0.5$.

Calcoliamo ora la pulsazione di crossover di guadagno ω_{CG} del sistema. Deve essere:

$$|G(j\omega_{CG})|=1.$$

Si ha

$$|G(j\omega)| = 2 \cdot \frac{1}{\omega \left(1 + \frac{1}{4}\omega^2\right)} = 1 \Rightarrow \omega^3 + 4\omega - 8 = 0.$$

Tale equazione si può risolvere per approssimazioni successive esplicitando il valore dell'incognita ad esempio come segue:

$$\omega = \sqrt[3]{8 - 4\omega}$$

e sostituendo al secondo membro un valore di prova per la pulsazione si determina un secondo valore per la stessa. Si sostituisce quest'ultimo ancora a secondo membro e si itera sino a giungere a convergenza. Nel nostro caso si giunge in pochi passi ad una soluzione con il valore di prova $\omega=1 \text{ rad s}^{-1}$ (dove tale valore di prova è scelto sulla base dell'andamento del diagramma di Bode delle ampiezze asintotico, che interseca l'asse a 0 dB nella decade 1-10 rad):

$$\omega_1=1.00;$$

$$\omega_2=1.59;$$

$$\omega_3=1.18;$$

$$\omega_4=1.48;$$

$$\omega_5=1.27;$$

$$\omega_6=1.43;$$

$$\begin{aligned}\omega_7 &= 1.32; \\ \omega_8 &= 1.40; \\ \omega_9 &= 1.34; \\ \omega_{10} &= 1.38; \\ \omega_{11} &= 1.35; \\ \omega_{12} &= 1.37; \\ \omega_{13} &= 1.36; \\ \omega_{14} &= 1.36.\end{aligned}$$

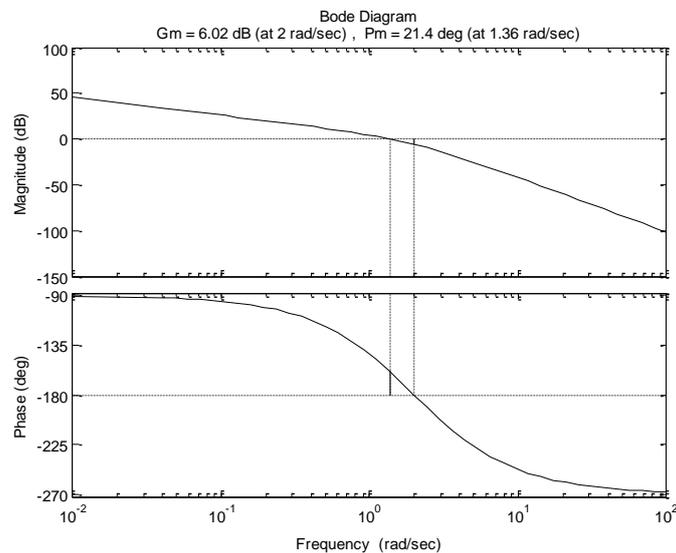
Dunque la soluzione reale dell'equazione su riportata (che è del terzo ordine e dunque ha tre soluzioni, di cui due complesse) è:

$$\omega_{CG} \approx 1.36 \left[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \right].$$

Il margine di fase del sistema vale quindi:

$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + \pi = -\frac{\pi}{2} - 2\arctg(0.5\omega_{CG}) + \pi \approx 0.37 \text{ rad } (21^\circ).$$

Evidentemente, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, essendo il margine di fase positivo. Inoltre tale margine di stabilità è notevolmente elevato.



Approfondimenti consigliati:

Capitolo 4 ed esercizi del testo G. Marro, Controlli Automatici, Zanichelli, 2004.

Copyright © 2018 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Capitolo 8 del testo A. V. Papadopoulos, M. Prandini, Fondamenti di Automatica. Esercizi, Pearson, 2016.

Capitoli 10 e 12 del testo M. Dotoli, M. P. Fanti, MATLAB – Guida al Laboratorio di Automatica, Città Studi, 2008.