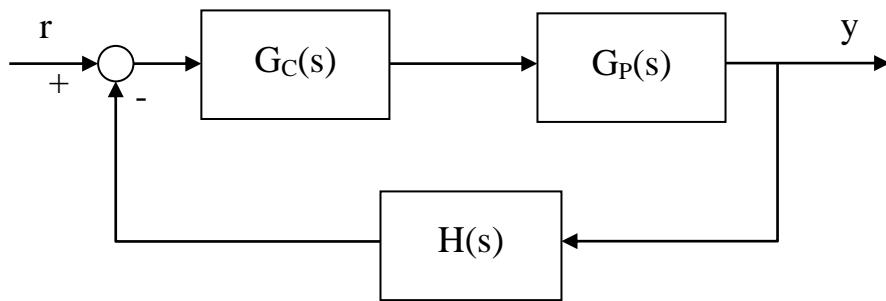


SINTESI DI RETI CORRETTRICI IN FREQUENZA

Con riferimento al sistema in figura, descriviamo ora la procedura tipica di progetto di un anello di retroazione, supposte note le funzioni di trasferimento del plant e del trasduttore, quando il regolatore è posto sul ramo diretto in cascata al plant (compensazione in serie o in cascata). Questa è infatti la configurazione più comune dell'anello di retroazione.



Nel progetto si considera inizialmente un semplice regolatore dato da un amplificatore di guadagno $G_C(s)=K$. Dopo aver verificato che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile, in genere il primo parametro che si determina in fase di progetto è la costante di posizione (per sistemi di tipo 0), di velocità (per sistemi di tipo 1), o di accelerazione (per sistemi di tipo 2), ossia il guadagno K , partire dalle specifiche di precisione dell'errore a regime, della sensibilità ai disturbi e alle variazioni parametriche.

In genere questa procedura porta a fissare un minimo valore del guadagno K che garantisce la precisione richiesta. Conviene attestarsi su tale valore minimo, poiché come è noto solitamente le specifiche sulla precisione e le caratteristiche di stabilità di un sistema sono conflittuali. Infatti comunemente la stabilità del sistema in anello chiuso peggiora all'aumentare del guadagno, poiché i rami del luogo delle radici tendono a spostarsi verso il semipiano destro di Gauss o, ragionando in termini di diagramma di Nyquist, all'aumentare dei moduli il diagramma polare tende ad abbracciare il punto critico, sì da non verificare il criterio di Nyquist ridotto.

Successivamente si analizza se il sistema in retroazione soddisfa le specifiche di stabilità e di velocità di risposta. Se tali specifiche non sono soddisfatte, occorre progettare una opportuna rete correttiva $G_C(s)$ da porre in cascata al sistema e al regolatore proporzionale in modo da modificare le caratteristiche dinamiche del sistema in anello chiuso. In questo caso, inoltre, il guadagno K del regolatore proporzionale va scelto in base alle specifiche di precisione precedentemente analizzate per l'intero sistema cos compensato.

La sintesi del compensatore può essere realizzata o utilizzando specifiche nel dominio del tempo (con il luogo delle radici) o specifiche nel dominio della frequenza (con i diagrammi di Bode o di Nyquist). Generalmente si procede per successive approssimazioni.

Nella compensazione serie generalmente si utilizzano i regolatori standard (o PID) o le reti correttive (ritardatrice, anticipatrice o ritardo-anticipo).

Nel primo caso il problema diviene quello di fissare opportunamente i parametri del regolatore secondo diversi metodi pratici di taratura.

Se invece si usano reti correttive il problema consiste nel fissare i parametri caratteristici che compaiono nella funzione di trasferimento del regolatore (costanti di tempo, coefficiente α di partizione).

Esaminiamo ora il problema della sintesi di reti correttive. Questa si può effettuare sia nel dominio della frequenza, utilizzando i diagrammi di Bode o Nyquist e analizzando i margini di stabilità, oppure nel dominio del tempo con il metodo del luogo delle radici. Nel seguito descriviamo per le reti correttive il metodo di sintesi per tentativi nel dominio della frequenza e, per la sola rete anticipatrice, anche un metodo di sintesi nel tempo basato sulla cancellazione polo-zero.

Si consideri il sistema in figura, in cui $G_c(s)$ è la rete correttiva e $G_p(s)$ il sistema da compensare. L'obiettivo che ci poniamo è progettare $G_c(s)$, in modo che l'uscita $y(t)$ del sistema compensato soddisfi determinate specifiche. Supponiamo che queste siano relative alla precisione a regime, espressa in termini di errore di posizione, velocità o accelerazione, e alla stabilità relativa, espressa in termini di margine di fase.

La compensazione di tale sistema nel dominio della frequenza si effettua come segue.

1. Si fissa il guadagno statico della funzione di trasferimento di anello in base alla specifica sull'errore a regime.
2. Si costruiscono i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello e si impostano le specifiche sulla stabilità relativa ed eventualmente sulla larghezza di banda, definendo il progetto di massima della rete compensatrice.
3. Si opera un'eventuale messa a punto della rete progettata, con il luogo delle radici o con i diagrammi di Bode.
4. Si effettua la verifica delle specifiche.

RETE RITARDATRICE

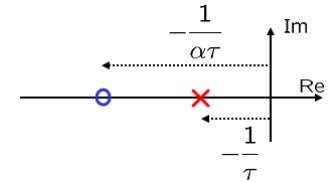
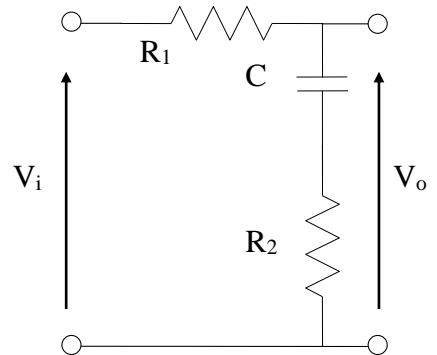
La rete ritardatrice (“phase lag”) è rappresentata in figura ed ha una funzione di trasferimento

$$G_R(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1+R_2Cs}{1+(R_1+R_2)Cs} = \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s},$$

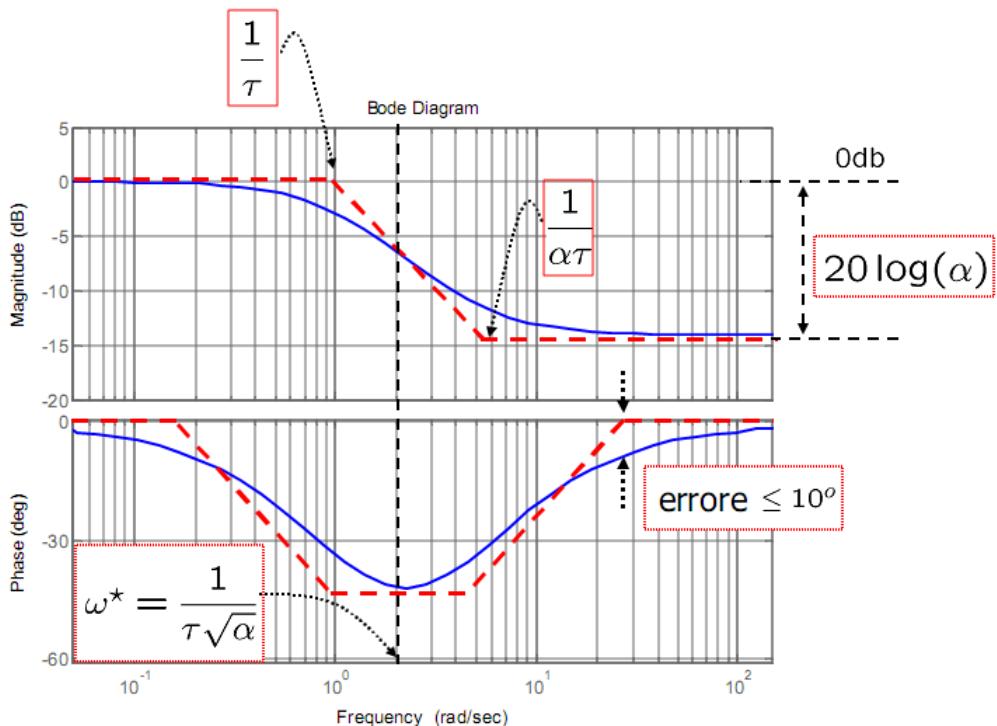
in cui si è posto

$$\tau = (R_1 + R_2)C, \quad \alpha \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1.$$

La rete presenta dunque un polo con pulsazione di break $\frac{1}{\tau}$ e uno zero con pulsazione di break $\frac{1}{\alpha\tau}$.



In figura sono riportati i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi per una rete del tipo descritto.



La rete quindi ritarda la fase per tutte le pulsazioni finite. In corrispondenza della pulsazione nulla essa non sfasa né attenua, in corrispondenza della pulsazione infinita essa non sfasa e attenua di $20\log_{10}\alpha$ dB. Infine, essa attenua di $10\log_{10}\alpha$ dB in corrispondenza della pulsazione media geometrica del polo e dello zero

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}.$$

Questa è anche la pulsazione alla quale la rete ha il massimo ritardo di fase, pari a

$$\varphi_m = -\arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

Si ha anche

$$\alpha = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}.$$

RETE ANTICIPATRICE

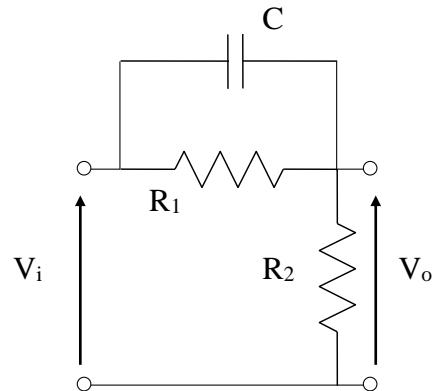
La rete anticipatrice (“phase lead”) è indubbiamente la più usata per la stabilizzazione dei sistemi di controllo in retroazione. Essa è rappresentata in figura ed ha una funzione di trasferimento

$$G_{AP}(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2(1+R_1Cs)}{R_1+R_2+R_1R_2Cs} = \alpha \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s},$$

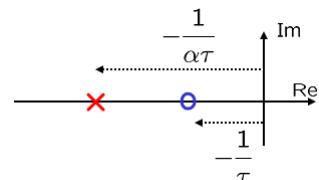
in cui si è posto

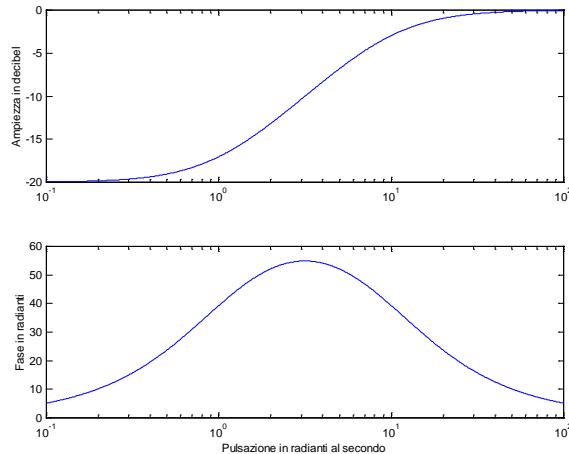
$$\tau = R_1C, \quad \alpha \frac{R_2}{R_1+R_2} < 1.$$

La rete presenta dunque uno zero con pulsazione di break $\frac{1}{\tau}$ ed un polo con pulsazione di break $\frac{1}{\alpha\tau}$.



In figura sono riportati i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi per una rete del tipo descritto.





La rete dunque anticipa la fase per tutte le pulsazioni finite. In corrispondenza della pulsazione nulla essa non sfasa e attenua di α , in corrispondenza della pulsazione infinita essa non sfasa né attenua.

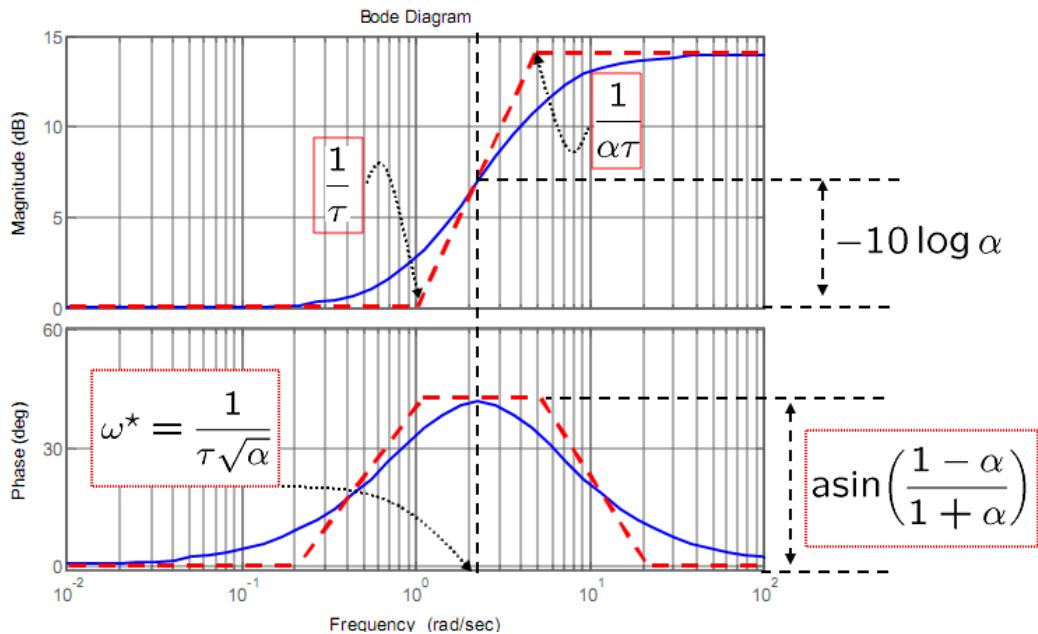
Spesso, tuttavia, nei procedimenti di sintesi si antepone alla rete anticipatrice un amplificatore che compensa l'attenuazione statica della rete, in modo che la complessiva funzione di trasferimento della rete correttrice valga:

$$G_A(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha \tau s}.$$

In questo modo la rete correttrice ha un guadagno statico unitario $G_A(0)=1$, il che permette –come nel caso della rete ritardatrice per la quale risulta $G_R(0)=1$ – di effettuare separatamente la sintesi del parametro K sulla base delle specifiche di precisione a regime (quindi per $s \rightarrow 0$) e quella della rete correttrice stessa.

Si ottiene dunque un guadagno in corrispondenza della pulsazione infinita pari a $-20\log_{10}\alpha$ dB, e di $-10\log_{10}\alpha$ dB in corrispondenza della pulsazione media geometrica dello zero e del polo

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}.$$



Questa è anche la pulsazione alla quale la rete ha il massimo anticipo di fase, pari a

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

Si ha anche

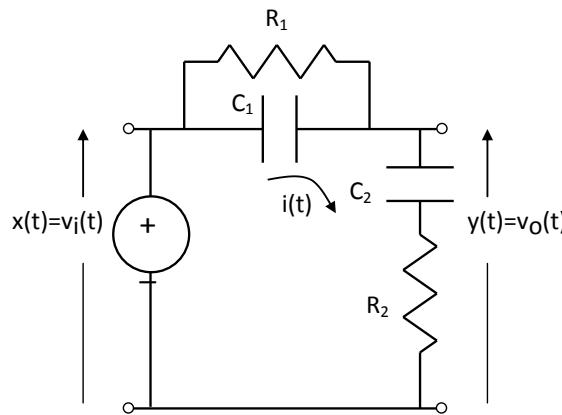
$$\alpha = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m}.$$

RETE RITARDO-ANTICIPO

La rete ritardo-anticipo (“phase lead-lag”) è utilizzata per la sua versatilità, in quanto a seconda della scelta dei suoi parametri può comportarsi da ritardatrice o da anticipatrice. Essa è rappresentata in figura ed ha una funzione di trasferimento

$$G_{RA}(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = G_R(s) \cdot G_A(s) = \frac{(1+\tau_1 s)}{(1+\frac{\tau_1}{\alpha} s)} \cdot \frac{(1+\tau_2 s)}{(1+\alpha \tau_2 s)},$$

che quindi è possibile interpretare come la cascata di una rete ritardatrice $G_R(s)$ con costante di tempo dello zero τ_1 e una anticipatrice attiva $G_A(s)$ con costante di tempo dello zero τ_2 aventi lo stesso rapporto di partizione α , avendo posto

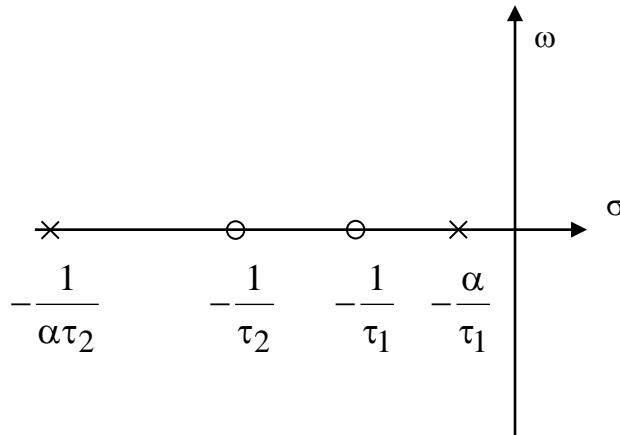


$$\tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2, \quad \tau_{12} = R_1 C_2.$$

Inoltre, detti p_1 e z_1 (p_2 e z_2) il polo e lo zero della componente ritardatrice (il polo e lo zero della componente anticipatrice) si ha

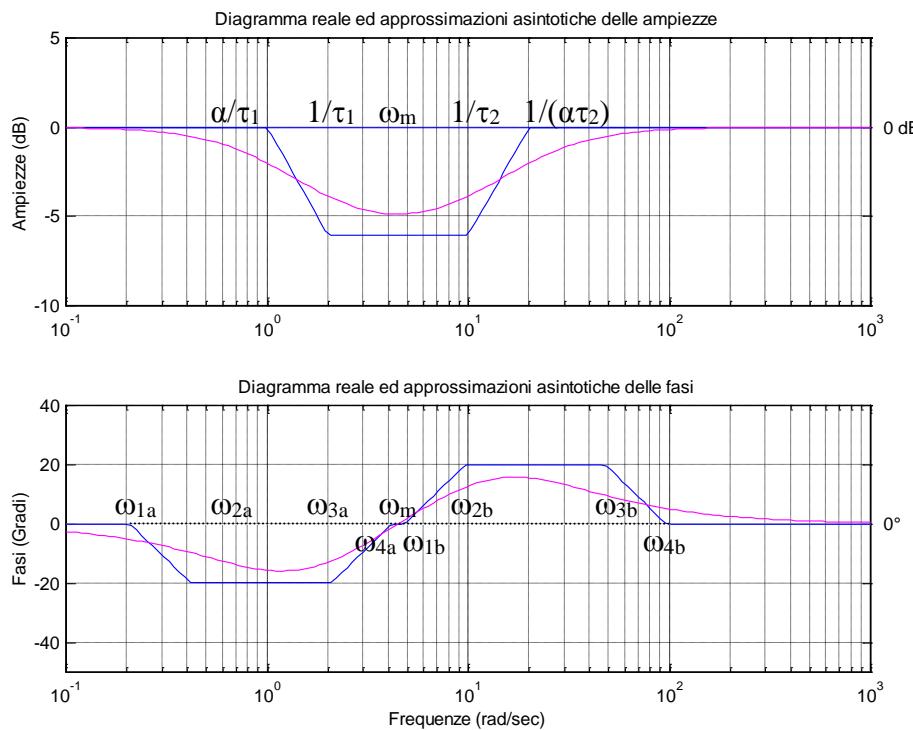
$$\alpha = \frac{p_1}{z_1} = \frac{z_2}{p_2} < 1$$

e la mappa poli-zeri della rete è illustrata nella seguente figura.



La rete presenta dunque due zeri con pulsazione di break $\frac{1}{\tau_1}$ e $\frac{1}{\tau_2}$ e due poli con pulsazione di break $\frac{\alpha}{\tau_1}$ e $\frac{1}{\alpha\tau_2}$.

In figura sono riportati i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi per una rete del tipo descritto.



La rete dunque inizialmente ritarda la fase per tutte le pulsazioni inferiori alla media geometrica delle pulsazioni di break dei due zeri:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

quindi per le pulsazioni successive la rete introduce un anticipo di fase.

In corrispondenza della pulsazione ω_m la rete non sfasa e attenua di α , corrispondendo a un guadagno di $20\log_{10}\alpha$ dB, mentre in corrispondenza della pulsazione nulla e infinita essa non sfasa né attenua. Infine, il massimo ritardo di fase e anticipo di fase della rete vale in valore assoluto

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

Si ha anche

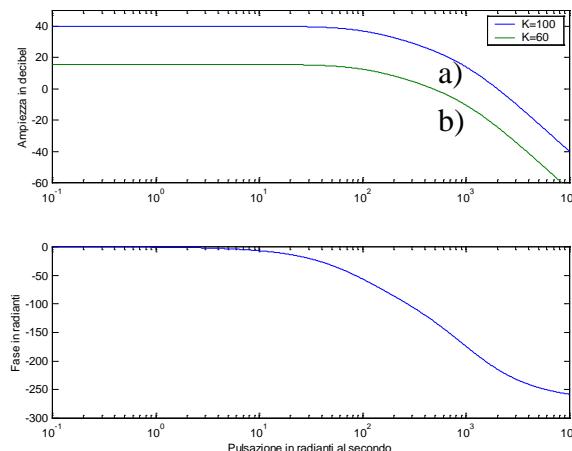
$$\alpha = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m}.$$

COMPENSAZIONE CON RETE RITARDATRICE

Nel seguito consideriamo una rete ritardatrice del tipo:

$$G_R(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s},$$

che ha un mappa poli zeri come quella in figura. Come è noto, la maggior parte dei sistemi in retroazione sono condizionatamente stabili. Perciò una riduzione del guadagno corrisponde generalmente ad un miglioramento delle caratteristiche di stabilità. Tale miglioramento è tuttavia generalmente controbilanciato da un peggioramento indesiderato della precisione.



Stabilizzazione per diminuzione della costante di guadagno.

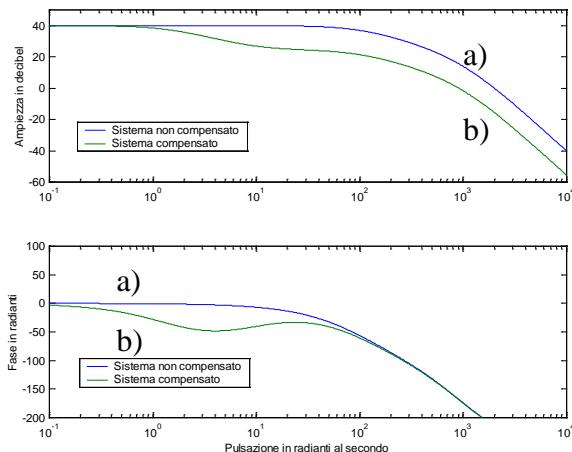
In particolare, nei sistemi di tipo zero e di tipo uno, ossia con nessun o un polo nell'origine in anello aperto, la stabilità si può sempre ottenere mediante una diminuzione della costante di guadagno, come è chiarito dall'esempio in figura. È infatti noto che la pulsazione di crossover cui ci si riferisce per il calcolo del margine di fase, pari alla pulsazione in cui il diagramma di Bode delle ampiezze interseca l'asse delle ascisse, dipende dalla pendenza del diagramma dei moduli in un intorno della frequenza medesima.

I diagrammi contrassegnati con a) corrispondono ad un sistema instabile; riducendo il guadagno le fasi non variano, ma si ottiene un nuovo diagramma delle ampiezze contrassegnato con b), corrispondente ad un sistema asintoticamente stabile. Nel

primo caso, nella frequenza di crossover si ha una pendenza del diagramma asintotico delle ampiezze di $-60 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$, mentre nel secondo caso essa è solo $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$; corrispondentemente, il margine di fase passa da un valore negativo ad un valore positivo.

Una correzione consistente nella semplice riduzione della costante di guadagno costituisce tuttavia un intervento sconsigliabile, poiché i sistemi in retroazione funzionano tanto meglio, come prontezza e sensibilità ai disturbi, quanto più elevato è il guadagno di anello, inoltre i dati di specifica relativi agli errori di regime spesso impongono un valore minimo della costante di guadagno.

Se si desidera stabilizzare il sistema senza diminuire il guadagno del sistema è allora possibile usare una rete ritardatrice. Infatti essa si comporta come un attenuatore, avendo un modulo sempre inferiore all'unità, ma presenta un guadagno statico unitario, dunque non influenza la precisione a regime del sistema retroazionato. Come indicato nell'esempio in figura, la rete ritardatrice comporta una diminuzione del guadagno alle alte frequenze senza influire sulla costante di guadagno, cioè sulla precisione, né sulle fasi alle alte frequenze, che restano invariate.



Stabilizzazione
con rete ritardatrice.

Infatti, se la costante di tempo relativa al polo della rete ritardatrice viene scelta di valore sufficientemente elevato, e quindi la relativa pulsazione di break è di valore sufficientemente basso rispetto alla pulsazione di crossover della rete complessiva, allora l'introduzione della rete da un lato non influisce sulla costante di guadagno e quindi sugli errori a regime, dall'altro permette di spostare il calcolo del margine di fase a pulsazioni con fasi maggiori (poiché i sistemi con cui abbiamo a che fare sono

tipicamente passabasso), dove si introduce un ritardo di fase trascurabile, con un complessivo beneficio per la stabilità.

D'altro canto, la presenza di tale rete correttiva può diminuire eccessivamente la larghezza di banda e, di conseguenza, la prontezza di risposta del sistema. Conviene pertanto scegliere un valore di attenuazione α non troppo piccolo, in modo che lo zero non sia troppo a sinistra nel range delle pulsazioni di interesse.

Scegliere una rete ritardatrice significa determinare la costante di tempo τ del polo della rete e il valore del parametro α . La tecnica di progetto che presentiamo per la sintesi di una rete ritardatrice segue l'impostazione tracciata ed è condotta per tentativi. Nel seguito riportiamo i passi principali da seguire.

Sia $KG(j\omega)$ la funzione di risposta armonica della catena diretta di un sistema chiuso in retroazione unitaria.

- 1) Si sceglie il parametro K reale fissando il guadagno statico in base alla specifica sull'errore (precisione). Ciò è reso possibile dal fatto che la rete ritardatrice ha un guadagno statico unitario e quindi la sua introduzione nell'anello di controllo non cambia il comportamento a regime del sistema.
- 2) Si disegnano i diagrammi di Bode di $KG(j\omega)$.
- 3) Si prende in considerazione la specifica sul margine di fase. Sia M_{FR} il minimo margine di fase richiesto. Si procede a verificare che il sistema non soddisfa tale specifica. In caso contrario, la rete ritardatrice non è necessaria. Fissato un coefficiente di tolleranza ϵ , di solito pari a 5-15 gradi, si determina dai diagrammi di Bode del sistema non compensato una pulsazione ω_c , evidentemente più bassa della pulsazione di crossover iniziale, alla quale la fase valga almeno $\angle G_R(j\omega_c) = -180^\circ + M_{FR} + \epsilon$; essa è la nuova frequenza di crossover del sistema compensato.
- 4) Perché ω_c sia la nuova frequenza di crossover, si impone che in essa la funzione di risposta armonica complessiva $KG_R(j\omega)G(j\omega)$ abbia ampiezza unitaria, ossia i contributi in dB del sistema non compensato e della rete ritardatrice, che si comporta per ipotesi come una attenuazione $20\log_{10} \alpha$, devono annullarsi:

$$20\log_{10}|KG(j\omega_c)| + 20\log_{10}\alpha = 0,$$

Si ottiene quindi l'attenuazione α della rete:

$$\alpha = 10^{-\frac{|KG(j\omega_c)|_{dB}}{20}}.$$

- 5) Affinché la rete correttiva non introduca ritardi in corrispondenza della nuova pulsazione di crossover di guadagno, si pone la pulsazione di zero della ritardatrice almeno un'ottava o una decade sotto tale pulsazione:

$$\frac{1}{\alpha\tau} = \frac{\omega_c}{10} \div \frac{\omega_c}{2}$$

da ciò si determina la costante di tempo del polo della rete

$$\tau = \frac{2}{\alpha\omega_c} \div \frac{10}{\alpha\omega_c}.$$

- 6) Si esegue infine la verifica o tracciando i diagrammi di Bode del sistema compensato, oppure per via analitica, utilizzando la pulsazione di crossover determinata. In quest'ultimo caso deve essere:

$$\angle G_R(j\omega_c) + \angle KG(j\omega_c) + 180^\circ \geq M_{FR}.$$

Se la condizione non è soddisfatta, si ritorna al punto 3) e si aumenta la tolleranza ε , sintetizzando una nuova rete.

In definitiva, la rete ritardatrice si usa con vantaggio nei sistemi in cui si vuole mantenere un elevato guadagno alle basse frequenze e sia ammissibile una riduzione della pulsazione di crossover di guadagno (e quindi della larghezza di banda del sistema in anello chiuso) per soddisfare le specifiche sul margine di fase.

Come si è precedentemente notato, l'inconveniente principale della rete ritardatrice è la riduzione del guadagno alle alte frequenze, cioè della larghezza di banda del sistema, che si traduce in una minore prontezza del transitorio della risposta nel tempo. In altre parole, l'uso di una rete ritardatrice limita solo parzialmente gli inconvenienti legati alla stabilizzazione di un sistema mediante una semplice riduzione del guadagno.

ESEMPIO

Sia un sistema in retroazione unitaria con funzione di trasferimento di anello:

$$G(s) = \frac{100K}{s(s+20)(s+100)}$$

Si vuole compensare il sistema ottenendo un margine di fase $M_{FR}=60^\circ$ e un errore di velocità $e_v=0.01$. Al termine della procedura di sintesi, si confrontino le risposte indiciali e la larghezza di banda del sistema dato in anello chiuso e di quello compensato con la rete ritardatrice progettata.

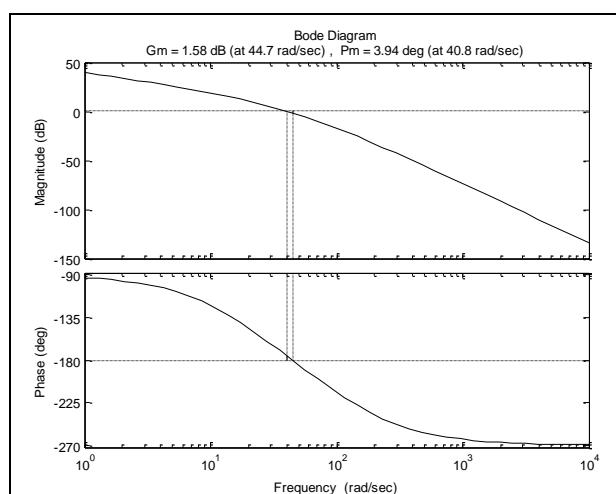
Scegliamo la costante di guadagno, applicando la specifica sulla precisione a regime (passo 1 della procedura).

Si impone:

$$\frac{1}{100} \geq \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s)} = \frac{2000}{100K}$$

da cui si sceglie il valore minimo $K=2000$ che rispetta la specifica di precisione.

Si determinano i diagrammi di Bode e i margini di stabilità del sistema compensato con la sola modifica della costante di guadagno (passo 2).



Si riscontra (passo 3) che il margine di fase, di circa 4° , è molto inferiore a quello richiesto pari a 60° . Si procede dunque a determinare la pulsazione di crossover di guadagno desiderata tale per cui (con $\varepsilon=10^\circ$)

$$\angle G_R(j\omega_c) = -180^\circ + M_{FR} + \varepsilon = -110^\circ.$$

Dal diagramma di Bode delle fasi si sceglie dunque $\omega_c = 6$ rad/s. Si legge dal diagramma di Bode delle ampiezze il corrispondente modulo del sistema compensato con la sola costante K di circa 25 dB, ottenendo l'attenuazione α (passo 4):

$$\alpha = 10^{-\frac{|G(j\omega_c)|_{dB}}{20}} \approx 0.06.$$

Si sceglie quindi la costante di tempo del polo della rete (passo 5)

$$\tau \in \left[\frac{2}{\alpha\omega_c}, \frac{10}{\alpha\omega_c} \right] = [5.5; 27.8] \text{ s}$$

Scegliendo uno dei valori massimi in modo da abbassare le pulsazioni di break della rete ritardatrice:

$$\tau = 27.$$

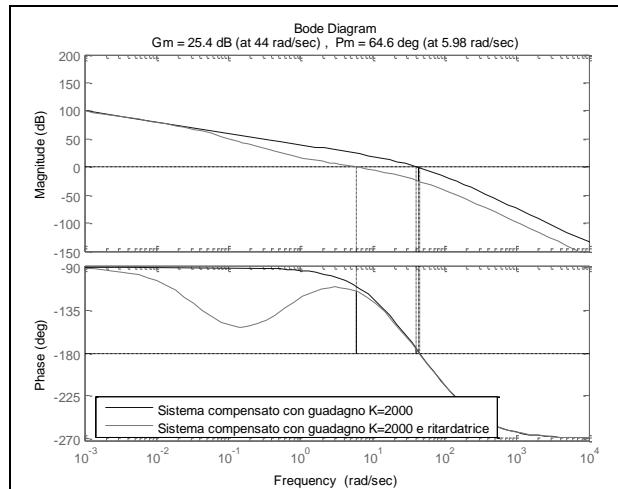
A questo punto si determina la rete correttrice:

$$G_R(s) = \frac{1 + 0.06 \cdot 27s}{1 + 27s} = \frac{1 + 1.62s}{1 + 27s},$$

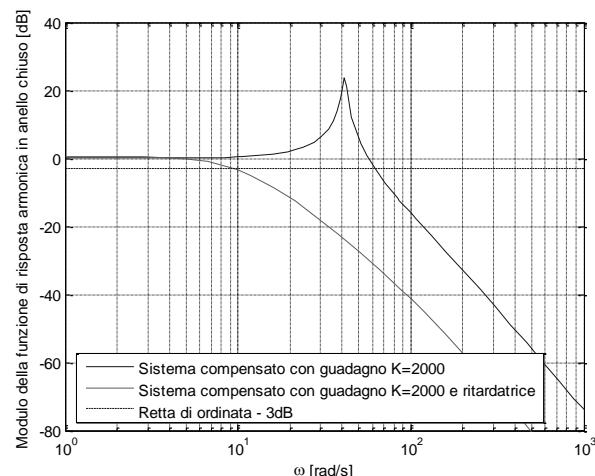
che ha uno zero in -0.6 e un polo in -0.03.

L'effetto stabilizzante della ritardatrice si osserva facilmente rappresentando i diagrammi di Bode e calcolando il nuovo margine di fase del sistema (passo 6), che rispetta la specifica in quanto vale ora 65° circa.

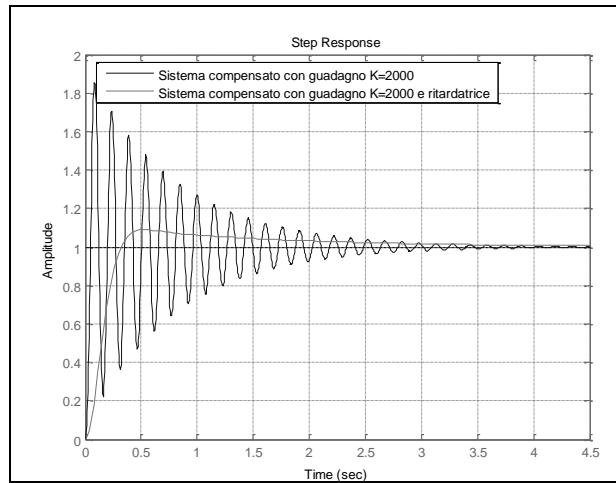
Si osserva che anche il margine di guadagno aumenta, passando da 1.6 dB a 25.4 dB.



Si osserva anche la diminuzione della banda passante, che passa da circa 62 rad/s a circa 9.6 rad/s (si veda la figura seguente).



Infine si confrontano la risposta al gradino del sistema originario e di quello compensato, che è più lento per via di tale riduzione della banda, ma presenta una risposta indiciale meno oscillante, in virtù del migliorato margine di fase.



COMPENSAZIONE CON RETE ANTICIPATRICE

Nei sistemi di tipo uno o superiore, ossia con uno o più poli nell'origine in anello aperto, la stabilizzazione non è ottenibile con una rete ritardatrice, poiché la fase è troppo bassa a tutte le frequenze di interesse. È invece vantaggioso introdurre un anticipo, che tenda a sollevare il diagramma delle fasi e quindi a stabilizzare il sistema. Ciò è realizzato proprio dalla rete anticipatrice che, pur lasciando invariato il guadagno statico, ossia non influendo sulla robustezza e precisione, introduce una amplificazione in alta frequenza, ossia produce un aumento della larghezza di banda.

Come la rete ritardatrice, anche la rete anticipatrice può essere progettata sulla base di specifiche come l'errore di precisione a regime e il margine di fase, con una procedura per tentativi che fa uso dei diagrammi di Bode del sistema non compensato. Mentre la compensazione con una rete ritardatrice è basata sull'attenuazione introdotta alle frequenze di interesse, l'intervento di una rete anticipatrice si basa sull'anticipo di fase che, inserito a pulsazioni opportune, può aumentare il margine di fase. D'altro canto, in molti sistemi di tipo 1 e di tipo superiore, la compensazione non è ottenibile con una rete ritardatrice, poiché la fase della funzione di risposta armonica da compensare è troppo bassa a tutte le frequenze di interesse. È invece vantaggioso introdurre un anticipo di fase in grado di stabilizzare il sistema.

Nel seguito consideriamo una rete anticipatrice attiva, ossia del tipo:

$$G_A(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}.$$

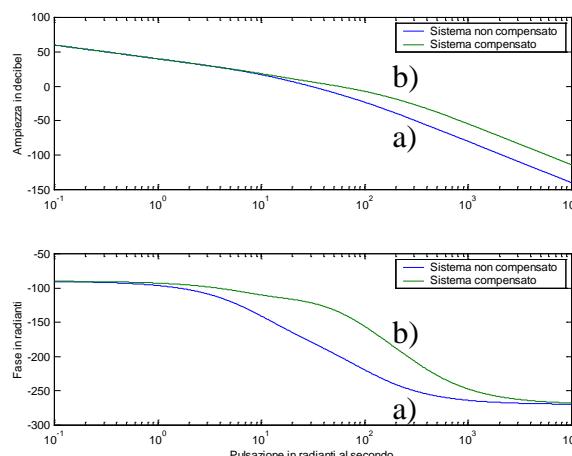
Come è noto, la rete anticipatrice presenta un anticipo di fase a tutte le frequenze, con un massimo nella sua pulsazione media geometrica tra lo zero e il polo della rete.

Pertanto l'uso di una rete siffatta permette un miglioramento del margine di fase del sistema complessivo.

Alle basse frequenze ($\omega \rightarrow 0$) il guadagno della rete è unitario (0 dB), perciò essa non influenza il comportamento a regime, vincolato dalla specifica sulla costante di errore. Alle alte frequenze la rete fornisce un guadagno positivo di valore $-20\log_{10}\alpha$ dB. Pertanto l'uso di una anticipatrice determina un aumento della pulsazione di crossover di guadagno della funzione di riposta armonica di anello, producendo un allargamento della banda passante in anello chiuso. Ciò ha, come è noto, un effetto benefico sulla rapidità di risposta del sistema.

Dunque la rete anticipatrice ha effetti benefici sia in termini di stabilità che di prontezza di risposta del sistema. Tuttavia, è sconsigliabile eccedere con l'aumento della larghezza di banda, poiché ciò rende il sistema maggiormente vulnerabile ai disturbi ad alta frequenza. Quindi, se l'anticipo da introdurre è maggiore di 60° , è conveniente usare più reti anticipatrici, invece di introdurne una sola con un valore molto basso del parametro α e quindi un'eccessiva amplificazione alle pulsazioni elevate.

Un esempio di stabilizzazione con rete anticipatrice è riportato in figura.



Stabilizzazione
con rete anticipatrice.

Il sistema a) è quello non compensato, il sistema b) è quello compensato con rete anticipatrice, che presenta a tutte le pulsazioni una fase maggiore. Pertanto la larghezza di banda aumenta e anche il margine di fase.

Un progetto che segua l'impostazione tracciata deve essere condotto per tentativi. Nel seguito riportiamo i passi principali da seguire nella sintesi di una o più reti anticipatrici in cascata.

Sia $KG(j\omega)$ la funzione di risposta armonica della catena diretta di un sistema chiuso in retroazione unitaria.

- 1) Si sceglie il parametro K reale fissando il guadagno statico in base alla specifica sull'errore (precisione). Ciò è reso possibile dal fatto che la rete anticipatrice ha un guadagno statico unitario e quindi la sua introduzione nell'anello di controllo non cambia il comportamento a regime del sistema.
- 2) Si disegnano i diagrammi di Bode di $KG(j\omega)$.
- 3) Si prende in considerazione la specifica sul margine di fase. Si supponga per esempio richiesto un margine di fase minimo M_{FR} . Si procede a verificare che il sistema non soddisfa a tale specifica, determinando l'effettivo margine di fase M_F del sistema. Se si ha $M_{FR} \geq M_F$ la rete anticipatrice non è necessaria. In caso contrario, fissato un coefficiente di tolleranza ε , di solito pari a 5-15 gradi, si fissa l'antípico massimo necessario, da introdurre nella nuova pulsazione di crossover ω_c pari a

$$\varphi_m = M_{FR} - M_F + \varepsilon.$$

- 4) Se $\varphi_m < 60^\circ$ è sufficiente introdurre una sola rete anticipatrice e si determina il parametro α della rete correttiva mediante la formula:

$$\alpha = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m}.$$

Se invece φ_m è superiore a 60° si pone $\varphi_m' = \beta M_{FR} - M_F + \varepsilon$ (con $\beta < 1$ scelto in modo che $\varphi_m' < 60^\circ$) e si determina la prima di due reti anticipatrici da porre in cascata al sistema con

$$\alpha = \frac{1 - \sin \varphi_m'}{1 + \sin \varphi_m'}.$$

- 5) Poiché l'antico massimo è introdotto nella nuova pulsazione di crossover ω_c , questa deve coincidere con la pulsazione media geometrica dello zero e del polo della rete anticipatrice. In tale pulsazione la anticipatrice ha una amplificazione $-10\log_{10}\alpha$, che deve evidentemente compensarsi con il contributo in dB del sistema, visto che l'ampiezza è unitaria nella pulsazione di crossover. Dunque si impone:

$$20\log_{10}|KG(j\omega_c)| = 10\log_{10}\alpha.$$

Essendo noto il secondo membro dell'equazione precedente, si determina la nuova pulsazione di crossover ω_c semplicemente cercando nel diagramma di Bode delle ampiezze del sistema non compensato la pulsazione alla quale l'ampiezza in dB è $10\log_{10}\alpha$.

- 6) Poiché la nuova pulsazione di crossover coincide con la media geometrica dello zero e del polo dell'anticipatrice, si ha:

$$\omega_c = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$$

da ciò si determina la costante di tempo dello zero della rete

$$\tau = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}}.$$

da cui si determinano le pulsazioni di zero e di polo della rete correttrice:

$$\frac{1}{\tau} = \omega_c\sqrt{\alpha}, \quad \frac{1}{\alpha\tau} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}}.$$

- 7) Si esegue infine la verifica o tracciando i nuovi diagrammi di Bode del sistema compensato, oppure utilizzando la pulsazione di crossover determinata. In quest'ultimo caso deve essere:

$$\angle G_A(j\omega_c) + \angle KG(j\omega_c) + 180^\circ \geq M_{FR}.$$

Se la verifica è negativa e $\varphi_m < 60^\circ$, si ritorna al punto 3) e si aumenta la tolleranza ε , sintetizzando una nuova rete anticipatrice. Se invece siamo nel caso di sintesi di

più reti anticipatrici, si torna al passo 3) e si determina la successiva rete anticipatrice.

In definitiva, la rete anticipatrice si usa con vantaggio nei sistemi con uno o più poli nell'origine, la cui stabilizzazione è difficile o impossibile con reti ritardatrici, poiché il ritardo di fase è molto elevato a tutte le frequenze di interesse.

Come si è precedentemente notato, l'uso di una rete anticipatrice comporta l'aumento della larghezza di banda del sistema, che si traduce in una maggiore prontezza del transitorio della risposta nel tempo. Naturalmente, è sconsigliabile eccedere con l'aumento della banda, poiché esso rende il sistema maggiormente vulnerabile ai disturbi in alta frequenza.

ESEMPIO

Si consideri nuovamente il sistema in retroazione unitaria con funzione di trasferimento di anello:

$$G(s) = \frac{100K}{s(s+20)(s+100)}$$

Si vuole compensare il sistema con una o più reti anticipatrici ottenendo un margine di fase $M_{FR}=60^\circ$ e un errore di velocità $e_v=0.01$. Al termine della procedura di sintesi, si confrontino le risposte indiciali e la larghezza di banda del sistema dato in anello chiuso e di quello compensato con la rete progettata.

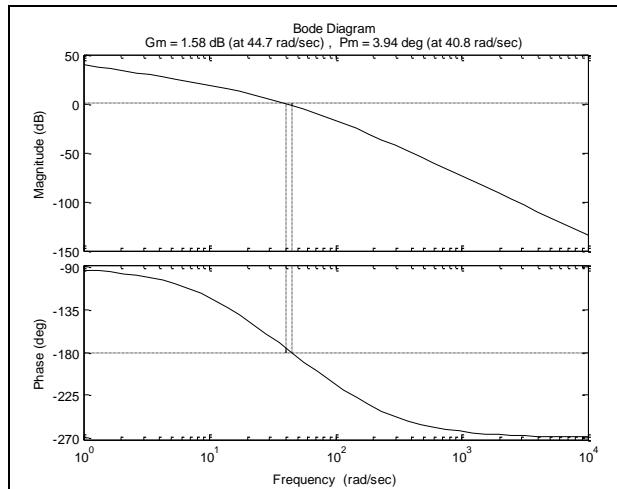
Scegiamo la costante di guadagno, applicando la specifica sulla precisione a regime (passo 1 della procedura).

Si impone:

$$\frac{1}{100} \geq \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s)} = \frac{2000}{100K}$$

da cui si sceglie il valore minimo $K=2000$ che rispetta la specifica di precisione.

Si determinano i diagrammi di Bode e i margini di stabilità del sistema compensato con la sola modifica della costante di guadagno (passo 2).



A questo punto si prende in considerazione la specifica sul margine di fase (passo 3). Si ha con $\varepsilon=25^\circ$:

$$\varphi_m = M_{FR} - M_F + \varepsilon = 60 - 5 + 25^\circ = 80^\circ > 60^\circ.$$

Ipotizzando di ottenere il 75% del margine di fase richiesto con una prima rete anticipatrice, si sceglie $\beta=0.75$ e quindi

$$\varphi_m' = \beta M_{FR} - M_F + \varepsilon = 0.75 \cdot 60 - 5 + 25^\circ = 65^\circ$$

da cui (passo 4)

$$\alpha_1 = \frac{1 - \sin \varphi_m'}{1 + \sin \varphi_m'} \approx 0.05$$

dove quindi si presuppone di progettare una rete correttrice nella forma

$$G_A(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \alpha_1 \tau_1 s} \cdot \frac{1 + \tau_2 s}{1 + \alpha_2 \tau_2 s}, \quad \tau_1 > 0, \tau_2 > 0, 0 < \alpha_1 < 1, 0 < \alpha_2 < 1$$

Determiniamo la nuova pulsazione di crossover ω_{c1} imponendo (passo 5):

$$20 \log_{10} |KG(j\omega_c)| = 10 \log_{10} \alpha \approx -13 \text{ dB.}$$

Si legge così $\omega_{c1}=80$ rad/s circa.

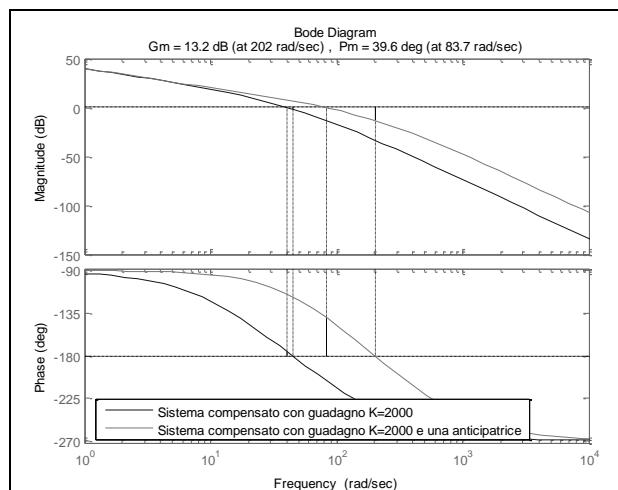
Si ottiene quindi la costante di tempo della rete (passo 6)

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_{c1}\sqrt{\alpha_1}} \approx 0.06 \text{ s.}$$

da cui si determinano le pulsazioni di zero e di polo della rete correttrice:

$$\frac{1}{\tau_1} = 16.67, \quad \frac{1}{\alpha_1 \tau_1} = 333.33.$$

Si determina quindi il sistema compensato con la prima rete anticipatrice e se ne tracciano i diagrammi di Bode, individuando i margini di stabilità per verificare il margine di fase ottenuto (passo 7). Il risultato è tracciato in figura. Si ha un margine di fase incrementato a circa 40° , ancora insufficiente, e una pulsazione di crossover di guadagno maggiore di quella originale.



Si ripete la procedura (passi 3, 4, 5, 6 e 7), determinando la seconda rete anticipatrice.

Si ha con $\varepsilon=25^\circ$ (passo 3):

$$\varphi_m = M_{FR} - M_{F+} \varepsilon = 60 - 40 + 25^\circ = 45^\circ < 60^\circ$$

Pertanto è sufficiente una seconda anticipatrice, con (passo 4)

$$\alpha_1 = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m} \approx 0.17$$

Determiniamo la nuova pulsazione di crossover ω_{c2} imponendo (passo 5):

$$20 \log_{10} |KG(j\omega_c)| = 10 \log_{10} \alpha \approx -8 \text{ dB.}$$

Si legge così $\omega_{c2}=140$ rad/s circa.

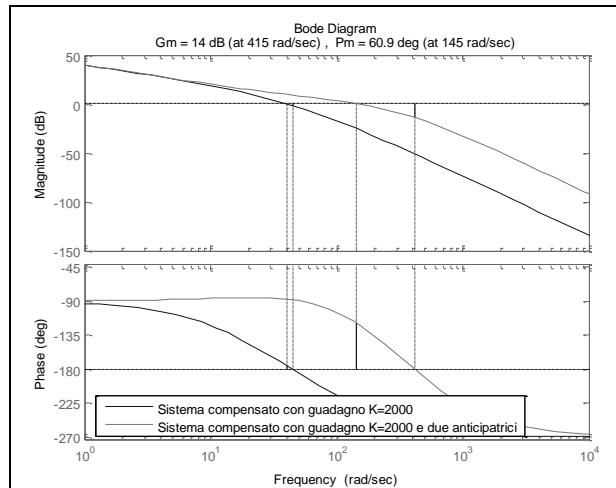
Si ottiene quindi la costante di tempo della rete (passo 6)

$$\tau_2 = \frac{1}{\omega_{c2}\sqrt{a_2}} \approx 0.17 \text{ s.}$$

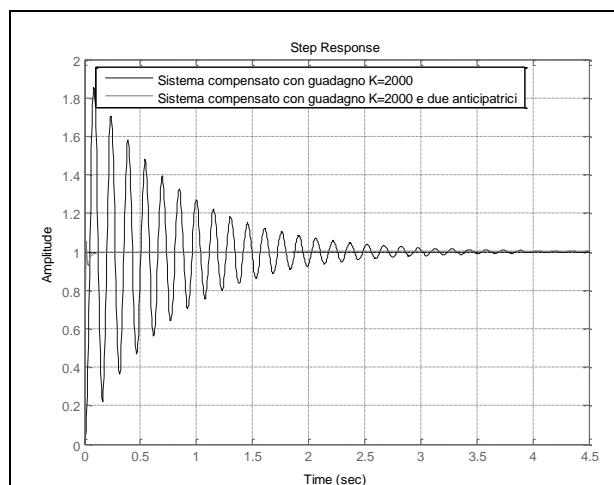
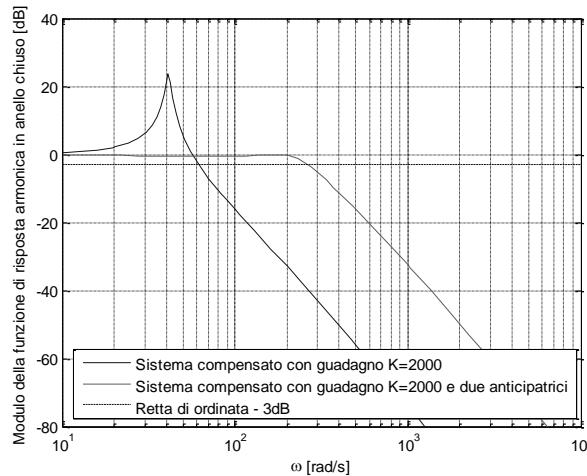
da cui si determinano le pulsazioni di zero e di polo della seconda rete correttrice:

$$\frac{1}{\tau_2} = 58.82, \quad \frac{1}{a_2\tau_2} = 346.02.$$

Si determina quindi il sistema compensato con la prima rete anticipatrice e se ne tracciano i diagrammi di Bode, individuando i margini di stabilità per verificare il margine di fase ottenuto (passo 7). Il risultato è tracciato in figura. Si ha un margine di fase incrementato a circa 61° , che rispetta la specifica, e una pulsazione di crossover di guadagno maggiore di quella originale pari a circa 145 rad/s.



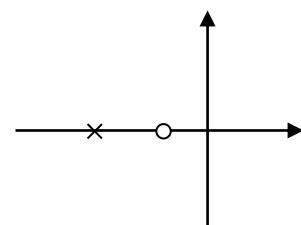
La figura successiva mostra che il sistema in anello chiuso compensato con le due reti anticipatrici presenta una larghezza di banda di circa 265 rad/s e, grazie alla maggiore stabilità relativa (ovvero all'aumentato margine di fase), non presenta picco di risonanza. Conseguentemente, come mostra l'ultima figura, il sistema compensato con le due reti anticipatrici presenta una risposta indiciale meno oscillante di quello originario (il margine di fase è superiore), ma più pronta (la larghezza di banda è incrementata).



COMPENSAZIONE CON RETE ANTICIPATRICE CON CANCELLAZIONE POLO-ZERO

Consideriamo ancora una rete anticipatrice attiva, del tipo:

$$G_A(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s},$$



che ha una mappa poli zeri come quella in figura. Un classico caso in cui si utilizza una rete anticipatrice per compensare un sistema in retroazione è quello in cui i poli dominanti in anello chiuso del sistema originario, ossia i rami dominanti del luogo delle radici, sono eccessivamente vicini all'asse immaginario, per cui la prontezza del sistema dato in anello chiuso non rispetta le specifiche di progetto.

In tal caso è sufficiente cancellare i poli dominanti in anello aperto (generalmente quelli più vicino all'asse immaginario, che rallentano maggiormente il sistema) con lo zero della rete anticipatrice. Il polo della rete viene poi posto a sinistra dello zero e sufficientemente lontano da rispettare le specifiche.

L'approccio per tentativi di progetto di una rete anticipatrice può essere quindi semplificato scegliendo lo zero della rete in modo che cancelli il polo dominante del sistema sull'asse reale; poiché il polo della rete anticipatrice è più lontano dall'asse immaginario dello zero, l'introduzione della rete equivale praticamente ad allontanare un polo del sistema dall'asse immaginario, rendendo il sistema più veloce. A questo tipo di intervento si dà il nome di compensazione polo-zero.

Si osserva che i soli poli cancellabili con questo metodo sono quelli contenuti nel semipiano sinistro di Gauss. In altre parole, i poli in anello aperto posti sull'asse immaginario o nel semipiano destro non sono cancellabili.

Infatti la conoscenza dei poli di sistema non è mai priva di imprecisioni, poiché generalmente deriva dalla modellazione di un sistema reale in cui alcune dinamiche di ordine superiore (attriti, perdite di vario genere, non linearità) possono essere state trascurate. Per tale motivo la cancellazione di un polo sull'asse immaginario o nel semipiano destro, non essendo mai quantitativamente perfetta, lascerebbe i modi di tale polo presenti nella risposta indiciale, seppure con un residuo molto piccolo. Poiché tali modi sono divergenti o comunque limitati, la risposta non convergerebbe a zero (il sistema non sarebbe asintoticamente stabile).

In altre parole, se si tentasse di cancellare un polo in anello aperto disposto nel piano destro o sull'asse immaginario, il ramo che si allontana da tale polo rimarrebbe presente nel luogo delle radici, giungendo in uno zero molto vicino al polo. Ciò priverebbe, almeno per alcuni valori del guadagno, il sistema della caratteristica di asintotica stabilità, rendendo dunque il progetto fallimentare.

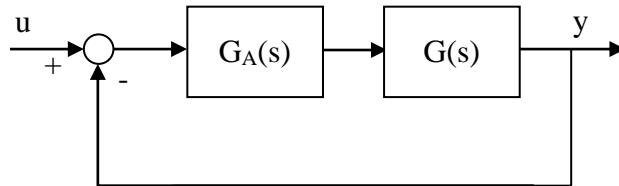
Vediamo ora con alcuni esempi la compensazione con rete anticipatrice per mezzo della tecnica di cancellazione polo-zero.

ESEMPIO

Compensare il sistema in retroazione unitaria negativa avente funzione di trasferimento di anello

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}, K > 0$$

in modo che in anello chiuso il sistema presenti un errore di velocità inferiore o uguale a 0.1 e un tempo di assestamento al 5% inferiore o uguale a 3 secondi.



Consideriamo dunque un generico regolatore con funzione di trasferimento $G_A(s)$ in serie al sistema e, con riferimento alla figura, poniamo dunque inizialmente

$$G_A(s) = 1$$

in modo da investigare il sistema privo di regolatore. Poiché esso è di tipo 1, si ha un errore di velocità finito e la costante di velocità vale:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s G_A(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s + 1} = K.$$

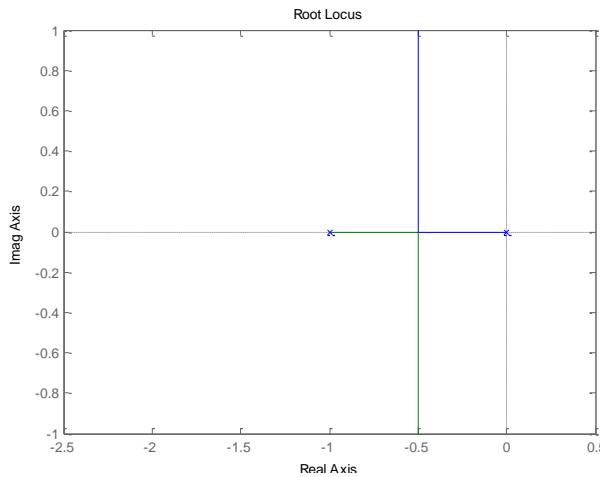
Quindi si richiede un guadagno

$$e_V = \frac{1}{K_V} = \frac{1}{K} \leq 0.1 \Rightarrow K \geq 10.$$

Il sistema in anello chiuso è sempre asintoticamente stabile, infatti si ha

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2 + s + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

e il luogo delle radici mostrato in figura è tutto contenuto nel semipiano sinistro di Gauss.



Dalla precedente espressione della funzione di trasferimento in anello chiuso si deduce inoltre che il sistema retroazionato presenta pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{K}$ e coefficiente di smorzamento $\delta = \frac{1}{2\sqrt{K}}$. Pertanto, i poli in anello chiuso sono complessi e coniugati per $\delta = \frac{1}{2\sqrt{K}} < 1 \Leftrightarrow K > 0.25$ e in tal caso il sistema presenta un tempo di assestamento al 5% $t_{s5\%} \approx \frac{3}{\delta\omega_n} = 6s$.

Sceglieremo inizialmente il minimo valore ammissibile di K , ossia $K=10$. In tal caso si ha una funzione di trasferimento in anello chiuso

$$G_0(s) = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

con poli complessi e coniugati in

$$p_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-40}}{2} \approx -0.5 \pm j 3.1.$$

Valutiamo il margine di fase. Si ha:

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{10}{-\omega^2 + j\omega},$$

da cui

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{\omega^4 + \omega^2}} = 1 \Rightarrow \omega^4 + \omega^2 - 100 = 0.$$

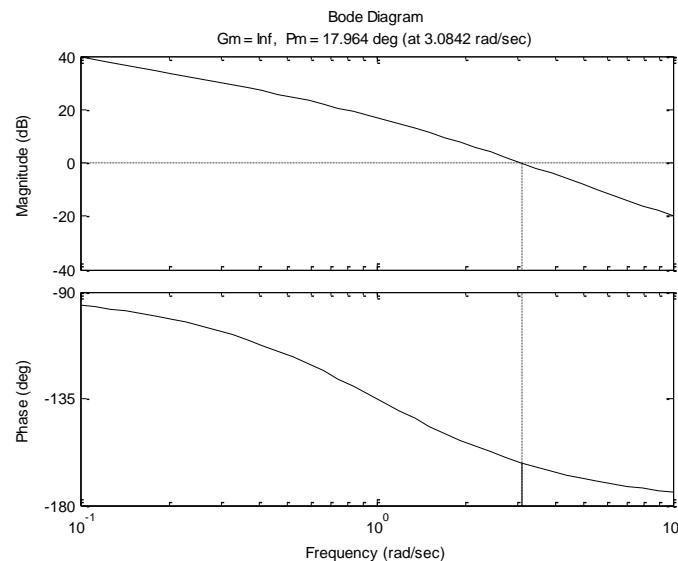
Ponendo $\omega^2=t$ e risolvendo per t si ha:

$$t^2 + t - 100 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 400}}{2} \approx 9.51 \Rightarrow \omega_{CG} = \sqrt{9.51} \approx 3.08 \left[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \right].$$

Si ha quindi una pulsazione di crossover del guadagno $\omega_{CG}=3.08 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Il margine di fase vale quindi:

$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + \pi = -\frac{\pi}{2} - \arctg(\omega_{CG}) + \pi \approx 0.31 \text{ rad } (18^\circ).$$



Ciò conferma che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, essendo il margine di fase positivo. Tuttavia il margine di stabilità non è particolarmente elevato.

Calcoliamo anche la larghezza di banda. La banda passante del sistema $B=\omega_f$ indica la pulsazione ω_f alla quale risulta:

$$|G_0(j\omega_f)| = \frac{|G_0(j0)|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |G_0(j\omega_f)|_{\text{dB}} = |G_0(j0)|_{\text{dB}} - 3\text{dB}.$$

In questo caso si ha:

$$G_0(j\omega) = \frac{10}{-\omega^2 + j\omega + 10},$$

quindi

$$|G_0(0)| = 1.$$

Dunque deve essere:

$$\frac{10}{\sqrt{(-\omega^2 + 10)^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega^4 - 19\omega^2 + 100 = 200 \Rightarrow \omega^4 - 19\omega^2 - 100 = 0.$$

Ponendo $\omega^2=t$ e risolvendo per t si ha:

$$t^2 - 19t - 100 = 0 \Rightarrow t = \frac{19 + \sqrt{361 + 400}}{2} = 23.29 \Rightarrow \omega_f = \sqrt{23.29} = 4.83 \quad [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}].$$

Si ha quindi una banda $B=4.83 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ o $f=B/(2\pi)=0.77 \text{ Hz}$.

Consideriamo ora la seconda specifica. Come anticipato, si ha:

$$t_{s5\%} = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{0.5} = 6 \text{ s}$$

che non verifica la specifica imposta sulla rapidità. La situazione è analoga quando il guadagno è di valore maggiore. In effetti si osserva che al variare del guadagno K, quando i poli in anello chiuso sono complessi e coniugati, non varia la loro parte reale, che resta fissa a 0.5, come si verifica dal luogo delle radici, dunque il tempo di assestamento al 5% è sempre pari a 6 secondi.

Scegliamo dunque di mantenere il valore minimo del guadagno $K=10$ fissato con la specifica sulla precisione e introduciamo sul ramo diretto una rete anticipatrice con uno zero che cancelli il polo in -1 in anello aperto del plant (ovvero poniamo nella rete $\tau=1$). Posizioniamo poi il polo della rete sufficientemente lontano nel semipiano sinistro (in modo che la rete correttrice sia appunto una anticipatrice):

$$G_A(s) = \frac{1+s}{1+\alpha s}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Osserviamo che in questo caso si è scelta una rete anticipatrice con guadagno statico unitario, in modo da non modificare la specifica imposta sulla precisione. Inoltre, avendo posizionato lo zero dell'anticipatrice in $1/\tau=1$, perché la rete sia un'anticipatrice il suo polo, che vale $-1/\alpha\tau=-1/\alpha$ ed è a fase minima, deve avere un costante di tempo inferiore a $\tau=1$.

Con l'introduzione della rete anticipatrice la funzione di trasferimento in anello aperto vale:

$$G_A(s)G(s) = \frac{10}{s(1+s)} \cdot \frac{1+s}{1+\alpha s} = \frac{10}{s(1+\alpha s)}.$$

Ne consegue che la funzione di trasferimento in anello chiuso diventa:

$$G_0(s) = \frac{10}{\alpha s^2 + s + 10} = \frac{\frac{10}{\alpha}}{s^2 + \frac{1}{\alpha}s + \frac{10}{\alpha}}$$

ed è dunque scritta nella forma di riferimento dei sistemi del secondo ordine, con

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{10}{\alpha}} \\ 2\delta\omega_n = \frac{1}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{10}{\alpha}} \\ \delta = \frac{1}{2\sqrt{10\alpha}} \end{cases}.$$

Quindi il tempo di assestamento del sistema in anello chiuso vale

$$t_{s5\%} = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{\frac{1}{2\alpha}} = 6\alpha.$$

Imponiamo dunque

$$t_{s5\%} = 6\alpha \leq 3,$$

da cui si ottiene

$$\alpha \leq 0.5.$$

A questo risultato si poteva giungere anche semplicemente osservando che l'effetto complessivo della regolazione con l'anticipatrice è quello di spostare il polo negativo in anello aperto a sinistra della sua posizione iniziale. I rami del luogo delle radici si spostano così verso il polo in anello aperto introdotto dalla rete anticipatrice, con un vantaggio in termini di prontezza di risposta. Inoltre la forma del luogo è invariata, poiché, a causa della cancellazione, in anello aperto le singolarità realmente efficaci sono il polo in $-1/\alpha$ dell'anticipatrice e il polo nell'origine del plant. In effetti la posizione del polo $-1/\alpha$ determina anche la posizione dei poli complessi e coniugati in anello chiuso che, come è noto, si trovano per simmetria sulla retta $s=-1/(2\alpha)$, ossia hanno parte reale $-1/(2\alpha)$.

La specifica sul tempo di assestamento diventa così

$$t_{s5\%} = \frac{3}{\frac{1}{2\alpha}} = 6\alpha \leq 3,$$

da cui si ottiene nuovamente

$$\alpha \leq 0.5.$$

Scegliamo allora il valore massimo $\alpha=0.5$, ossia la minima distanza dall'asse immaginario del polo posto nel semipiano sinistro ($s=-1/\alpha=-2$) che consente la compensazione. La rete compensatrice scelta è dunque

$$G_A(s) = \frac{1+s}{1+0.5s},$$

quindi la funzione di trasferimento di anello diventa:

$$G_A(s)G(s) = \frac{(1+s)}{1+0.5s} \cdot \frac{10}{s(1+s)} = \frac{10}{s(1+0.5s)}$$

ed è evidente la cancellazione polo-zero.

Il sistema con il regolatore è ancora di tipo 1 e la precisione è invariata, poiché la rete anticipatrice utilizzata ha guadagno statico unitario. Infatti si ha:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG_A(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{(0.5s+1)} = 10$$

ed in definitiva

$$e_V = 0.1$$

che verifica la specifica sulla precisione.

Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, infatti si ha

$$G_0(s) = \frac{10}{0.5s^2 + s + 10} = \frac{20}{s^2 + 2s + 20}$$

con poli complessi e coniugati in

$$p_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-20} \approx -1 \pm j 4.4.$$

Il tempo di assestamento al 5% vale quindi:

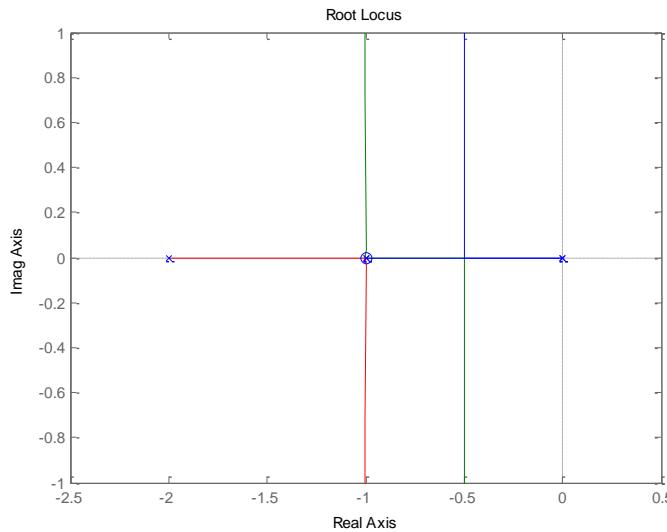
$$t_{s5\%} = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{1} = 3 \text{ s}$$

che verifica la specifica imposta sulla rapidità. In effetti il sistema in anello aperto, per via delle rete anticipatrice è il seguente:

$$G_A(s)G(s) = \frac{1+s}{1+0.5s} \cdot \frac{K}{s(s+1)} = \frac{K}{s(1+0.5s)} = \frac{2K}{s(s+2)} = \frac{K'}{s(s+2)}.$$

Il nuovo luogo delle radici è quello nella figura successiva.

La forma del luogo è invariata, ma è evidente l'effetto complessivo della regolazione, che provoca lo spostamento dei rami del luogo delle radici verso il polo della anticipatrice, con un vantaggio in termini di prontezza di risposta.



Valutiamo ora l'effetto della compensazione sul margine di fase. Si ha:

$$G_A(j\omega)G(j\omega) = \frac{20}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{20}{-\omega^2 + 2j\omega},$$

da cui

$$|G_A G(j\omega)| = \frac{20}{\sqrt{\omega^4 + 4\omega^2}} = 1 \Rightarrow \omega^4 + 4\omega^2 - 400 = 0.$$

Ponendo $\omega^2=t$ e risolvendo per t si ha:

$$t^2 + 4t - 400 = 0 \Rightarrow t = -2 + \sqrt{4 + 400} \approx 18.1 \Rightarrow \omega_{CG} = \sqrt{18.1} \approx 4.25 \quad [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}].$$

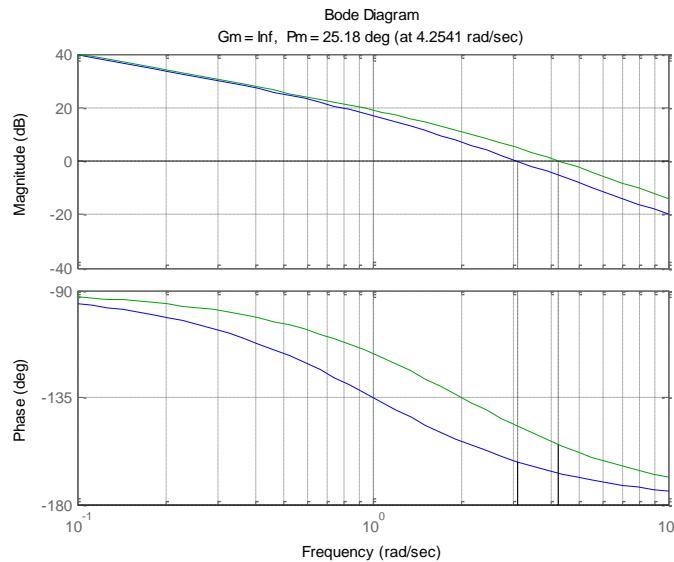
Si ha quindi una pulsazione di crossover del guadagno $\omega_{CG}=4.25 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, superiore rispetto a quella ottenuta con il sistema non compensato.

Il margine di fase vale quindi:

$$M_F = \angle G_A G(j\omega_{CG}) + \pi = -\frac{\pi}{2} - \arctg(0.5\omega_{CG}) + \pi \approx 0.44 \text{ rad } (25.2^\circ).$$

Ciò conferma che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, essendo il margine di fase positivo. Inoltre il margine di fase è aumentato di 7° rispetto alla situazione iniziale, migliorando la stabilità relativa del sistema. Questa può

evidentemente essere ulteriormente incrementata diminuendo il valore di a , ossia spostando più a sinistra nel semipiano di Gauss il polo della rete anticipatrice.



Calcoliamo anche la nuova larghezza di banda. In questo caso si ha:

$$G_0(j\omega) = \frac{20}{-\omega^2 + 2j\omega + 20},$$

quindi

$$|G_0(0)| = 1.$$

Dunque deve essere:

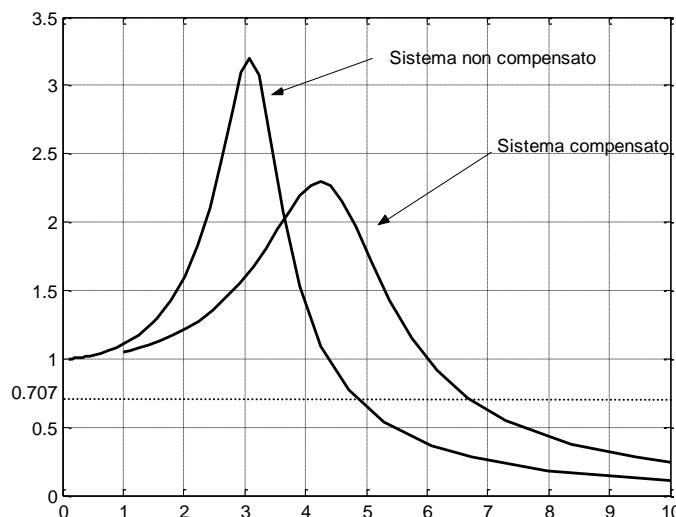
$$\frac{20}{\sqrt{(-\omega^2 + 20)^2 + 4\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega^4 - 36\omega^2 + 400 = 800 \Rightarrow \omega^4 - 36\omega^2 - 400 = 0.$$

Ponendo $\omega^2=t$ e risolvendo per t si ha:

$$t^2 - 36t - 400 = 0 \Rightarrow t = 18 + \sqrt{324 + 400} = 44.91 \Rightarrow \omega_f = \sqrt{44.91} \approx 6.70 \left[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \right].$$

Si ha quindi una banda $B=6.70 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ o $f=B/(2\pi)=1.07 \text{ Hz}$, che è superiore rispetto al caso in cui il sistema non è compensato. In figura sono confrontati i diagrammi dei

moduli effettivi delle funzioni di risposta armonica complessive nei due casi di sistema compensato e non.



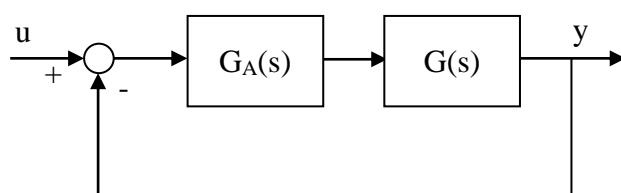
È evidente dalla figura precedente come il sistema compensato presenti una banda più larga di quello privo di rete anticipatrice, contro un picco di risonanza più contenuto.

ESEMPIO

Compensare il sistema in retroazione unitaria negativa avente funzione di trasferimento di anello

$$G(s) = \frac{10K}{(1+s)(1+2s)}, K>0$$

in modo che in anello chiuso il sistema presenti un errore di posizione inferiore o uguale a 0.005 e un coefficiente di smorzamento maggiore o uguale a 0.18. Si determini quindi la massima sovraelongazione percentuale del sistema compensato.



Consideriamo dunque un generico regolatore con funzione di trasferimento $G_A(s)$ in serie al sistema e, con riferimento alla figura, poniamo dunque inizialmente

$$G_A(s) = 1$$

in modo da investigare il sistema privo di regolatore. Poiché esso è di tipo 0, si ha un errore di posizione finito e la costante di posizione vale:

$$K_P = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{10K}{(1+s)(1+2s)} = 10K .$$

Quindi si richiede:

$$e_P = \frac{1}{1+K_P} = \frac{1}{1+10K} \leq 0.005 \Rightarrow K \geq 19.9 .$$

Per semplicità, si sceglie quindi il minimo valore di K intero consentito:

$$K=20.$$

Il sistema in anello chiuso ha una funzione di trasferimento

$$G_0(s) = \frac{200}{(1+s)(1+2s)+200} = \frac{200}{2s^2 + 3s + 201} = \frac{200}{201} \cdot \frac{\frac{201}{2}}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{201}{2}}$$

che è nella forma di riferimento dei sistemi del secondo ordine, con

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{201}{2}} \\ 2\delta\omega_n = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{201}{2}} \approx 10.025 \\ \delta = \frac{3}{2\sqrt{402}} \approx 0.075 \end{cases} .$$

Dunque il sistema è asintoticamente stabile con due poli complessi e coniugati, avendo un coefficiente di smorzamento positivo e inferiore all'unità. Tuttavia la seconda specifica non è verificata.

Scegliamo dunque di mantenere il valore $K=20$ fissato con la specifica sulla precisione e introduciamo sul ramo diretto una rete anticipatrice:

$$G_A(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \tau > 0.$$

Cancelliamo il polo più lento in anello aperto (posto in -0.5) con uno zero posto nella stessa posizione:

$$1 + \tau s \Big|_{-0.5} = 0 \Rightarrow 1 - 0.5\tau = 0 \Rightarrow \tau = 2.$$

Poniamo poi il polo della rete sufficientemente lontano nel semipiano sinistro (in modo che la rete correttrice sia una anticipatrice):

$$G_A(s) = \frac{1 + 2s}{1 + 2\alpha s}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Con l'introduzione della rete anticipatrice la funzione di trasferimento in anello aperto vale:

$$G_A(s)G(s) = \frac{200}{(1+s)(1+2s)} \cdot \frac{1+2s}{1+2\alpha s} = \frac{200}{(1+s)(1+2\alpha s)}.$$

Ne consegue che la funzione di trasferimento in anello chiuso diventa:

$$G_0(s) = \frac{200}{(1+s)(1+2\alpha s) + 200} = \frac{200}{2\alpha s^2 + (2\alpha + 1)s + 201} = \frac{200}{201} \cdot \frac{\frac{201}{2\alpha}}{s^2 + \frac{(2\alpha + 1)}{2\alpha}s + \frac{201}{2\alpha}}$$

che è nella forma di riferimento dei sistemi del secondo ordine, con

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{201}{2\alpha}} \\ 2\delta\omega_n = \frac{(2\alpha + 1)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{201}{2\alpha}} \\ \delta = \frac{(2\alpha + 1)}{2\sqrt{402\alpha}} \end{cases}.$$

Imponiamo quindi la seconda specifica:

$$\delta = \frac{(2\alpha + 1)}{2\sqrt{402\alpha}} = 0.18 \Rightarrow 2\alpha + 1 = 0.36\sqrt{402\alpha} \Rightarrow 4\alpha^2 - 48.1\alpha + 1 = 0.$$

Scegliamo la soluzione minore di uno di questa equazione:

$$\alpha \approx 0.02.$$

La rete compensatrice scelta è dunque

$$G_A(s) = \frac{1+2s}{1+0.04s},$$

quindi la funzione di trasferimento di anello diventa:

$$G_A(s)G(s) = \frac{200}{(1+s)(1+0.04s)}.$$

Si ha poi:

$$G_0(s) = \frac{200}{201} \cdot \frac{5025}{s^2 + 13.5s + 5025}$$

con poli complessi e coniugati in

$$p_{1/2} = -6.25 \pm \sqrt{39.06 - 5025} \approx -6.25 \pm j 70.57$$

e coefficiente di smorzamento richiesto $\delta=0.18$. La massima sovraelongazione percentuale del sistema compensato vale dunque:

$$M_P = 100e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 100e^{-\frac{0.18\pi}{\sqrt{1-0.18^2}}} \approx 56.3\%.$$

COMPENSAZIONE CON RETE RITARDO-ANTICIPO

Una rete che presenta i vantaggi di entrambe le due reti trattate, anticipatrice e ritardatrice, è la rete ritardo-antropo, avente la funzione di trasferimento:

$$G_{RA}(s) = \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\frac{\tau_1}{\alpha} s)(1+\alpha \tau_2 s)} = \frac{(1+\tau_1 s)}{(1+\frac{\tau_1}{\alpha} s)} \cdot \frac{(1+\tau_2 s)}{(1+\alpha \tau_2 s)} = G_R(s) \cdot G_A(s), \quad \tau_1 > 0, \tau_2 > 0, 0 < \alpha < 1.$$

La rete presenta due poli reali con costante di tempo τ_1/α e $\alpha\tau_2$ e due zeri reali con costanti di tempo τ_1 e τ_2 . La funzione di trasferimento può essere vista come costituita da due reti in cascata: anticipatrice ($G_A(s)$) e ritardatrice ($G_R(s)$), caratterizzate dallo stesso valore del parametro α .

Come per le reti correttive viste in precedenza, anche la compensazione in cascata con una rete ritardo-antropo si può effettuare con l'analisi in frequenza del sistema non compensato. Le specifiche principali sono ancora la precisione a regime e il margine di fase, ma, grazie al doppio effetto della ritardatrice e dell'anticipatrice, in questo caso è possibile anche soddisfare l'eventuale specifica sulla larghezza di banda.

La rete ritardo-antropo, infatti, permette di sfruttare i pregi di entrambe le reti correttive: consente di stabilizzare sistemi assolutamente instabili (ovvero sistemi che, se chiusi in retroazione con un semplice regolatore proporzionale, sono instabili in anello chiuso per qualsiasi valore del guadagno), senza un eccessivo aumento della larghezza di banda. Inoltre, poiché la rete ritardo-antropo ha guadagno statico unitario, non varia la precisione a regime.

La procedura per eseguire la sintesi di una rete ritardo-antropo ricalca gli algoritmi presentati per la rete ritardatrice e anticipatrice. Si inizia, ad esempio, con il progetto della sottorete ritardatrice $G_R(s)$ e quindi si procede con la determinazione della parte anticipatrice della rete, dividendo l'incremento del margine di fase da introdurre tra le due reti. Nel seguito riportiamo i passi principali della procedura di sintesi per tentativi di una rete ritardo-antropo, iniziando il progetto dalla sintesi della rete ritardatrice, ma un algoritmo analogo può iniziare il progetto dalla determinazione della rete anticipatrice.

Sia $KG(j\omega)$ la funzione di risposta armonica della catena diretta di un sistema chiuso in retroazione unitaria.

- 1) Si sceglie il parametro K reale fissando il guadagno statico in base alla specifica sull'errore (precisione).
- 2) Si disegnano i diagrammi di Bode di $KG(j\omega)$.
- 3) Si prende in considerazione la specifica sul margine di fase. Sia M_{FR} il minimo margine di fase richiesto. Si procede a verificare che il sistema non soddisfa tale specifica. In caso contrario, la rete correttiva non è necessaria. Fissato un coefficiente di tolleranza ϵ , di solito pari a 5-15 gradi, si determina dai diagrammi di Bode del sistema non compensato una pulsazione ω_{c1} , evidentemente più bassa della pulsazione di crossover iniziale, alla quale la fase valga almeno $\angle G_R(j\omega_{c1}) = -180^\circ + \beta M_{FR} + \epsilon$ dove $0 < \beta < 1$ è un parametro assegnato che indica il contributo che nella compensazione si vuole assegnare alla rete ritardatrice. Si posiziona quindi in ω_{c1} la pulsazione di *crossover* di guadagno del sistema compensato con la sola sotto-rete ritardatrice.
- 4) Perché ω_{c1} sia la nuova frequenza di crossover, si impone che in essa la funzione di risposta armonica complessiva $KG_R(j\omega)G(j\omega)$ abbia ampiezza unitaria, ossia i contributi in dB del sistema non compensato e della rete ritardatrice, che si comporta per ipotesi come una attenuazione $20\log_{10} \alpha$, devono annullarsi:

$$20\log_{10}|KG(j\omega_{c1})| + 20\log_{10}\alpha = 0.$$

Si ottiene quindi l'attenuazione α della rete:

$$\alpha = 10^{-\frac{|KG(j\omega_c)|_{dB}}{20}}.$$

- 5) Affinché la rete correttiva non introduca ritardi in corrispondenza della nuova pulsazione di crossover di guadagno, si pone la pulsazione di zero della ritardatrice almeno un'ottava o una decade sotto tale pulsazione:

$$\frac{1}{\alpha\tau_1} = \frac{\omega_{c1}}{10} \div \frac{\omega_{c1}}{2}$$

da ciò si determina la costante di tempo del polo della rete ritardatrice

$$\tau_1 = \frac{2}{\alpha\omega_{c1}} \div \frac{10}{\alpha\omega_{c1}}.$$

- 6) La sottorete anticipatrice $G_A(s)$ deve avere lo stesso coefficiente α già fissato al punto 5. Si impone quindi che l'anticipo massimo (ormai già determinato) sia introdotto in corrispondenza della nuova pulsazione di *crossover* di guadagno ω_{c2} :

$$20\log_{10} |G_R(j\omega_{c2}) \cdot KG(j\omega_{c2})| = 10\log_{10} \alpha,$$

da cui si ottiene la pulsazione ω_{c2} (graficamente si individua sul diagramma di Bode delle ampiezze del sistema compensato con la sola sotto-rete ritardatrice la pulsazione alla quale l'ampiezza vale $10\log_{10}\alpha$ dB).

- 7) Poiché la nuova pulsazione di *crossover* di guadagno deve coincidere con la pulsazione di massimo anticipo, si impone:

$$\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2 \sqrt{\alpha}},$$

da cui si determina la pulsazione dello zero della rete:

$$\frac{1}{\tau_2} = \omega_{c2} \sqrt{\alpha}.$$

- 8) Si esegue infine la verifica o tracciando i nuovi diagrammi di Bode del sistema compensato, oppure utilizzando la seguente relazione:

$$\angle G_{RA}(j\omega_{c2}) + \angle KG(j\omega_{c2}) + 180^\circ \geq M_{FR}.$$

Se la specifica sul margine di fase non è soddisfatta, si ritorna al punto 3 e si aumenta la tolleranza ε o si varia il coefficiente β .

Si noti che, tramite il coefficiente β , è possibile decidere di compensare il sistema dato attribuendo maggior peso alla ritardatrice ($\beta > 0.5$) o all'anticipatrice ($\beta < 0.5$), con una conseguente variazione in diminuzione o in aumento della larghezza di banda rispetto al valore iniziale.

ESEMPIO

Si consideri nuovamente il sistema in retroazione unitaria con funzione di trasferimento di anello:

$$G(s) = \frac{100K}{s(s+20)(s+100)}$$

Si vuole compensare il sistema ottenendo un margine di fase $M_{FR}=60^\circ$ e un errore di velocità $e_v=0.01$, senza variare eccessivamente la larghezza di banda. Si sceglie pertanto una rete ritardo-anticipo con $\beta=0.5$. Al termine della procedura di sintesi, si confrontino le risposte indiciali e la larghezza di banda del sistema dato in anello chiuso e di quello compensato con la rete progettata.

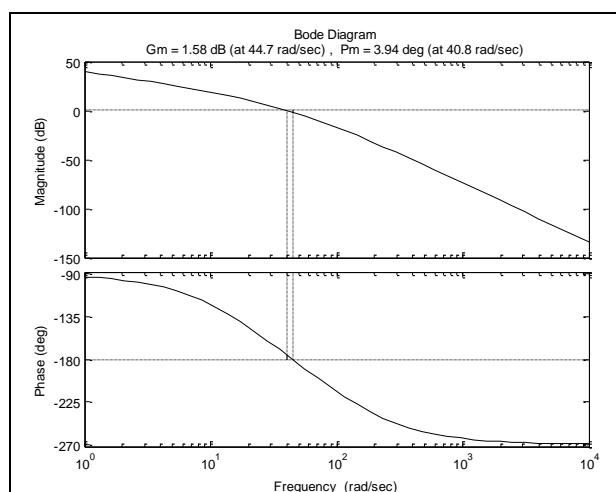
Scegliamo la costante di guadagno, applicando la specifica sulla precisione a regime (passo 1 della procedura).

Si impone:

$$\frac{1}{100} \geq \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s)} = \frac{2000}{100K}$$

da cui si sceglie il valore minimo $K=2000$ che rispetta la specifica di precisione.

Si determinano i diagrammi di Bode e i margini di stabilità del sistema compensato con la sola modifica della costante di guadagno (passo 2).



Si riscontra (passo 3) che il margine di fase, di circa 4° , è molto inferiore a quello richiesto pari a 60° . Si procede dunque a determinare la sottorete correttiva e la nuova pulsazione di crossover di guadagno tale per cui (con $\beta=0.5$ e $\varepsilon=10^\circ$)

$$\angle G_R(j\omega_c) = -180^\circ + \beta M_{FR} + \varepsilon = -140^\circ.$$

Dal diagramma di Bode delle fasi si sceglie dunque $\omega_{c1}=17$ rad/s. Si legge dal diagramma di Bode delle ampiezze il corrispondente modulo del sistema compensato con la sola costante K di circa 13 dB, ottenendo l'attenuazione α (passo 4):

$$\alpha = 10^{-\frac{|G(j\omega_c)|_{dB}}{20}} \approx 0.22.$$

Si sceglie quindi la costante di tempo del polo della rete (passo 5)

$$\tau \in \left[\frac{2}{\alpha \omega_{c1}}; \frac{10}{\alpha \omega_{c1}} \right] = [0.53; 2.67] \text{ s}$$

Si sceglie per esempio

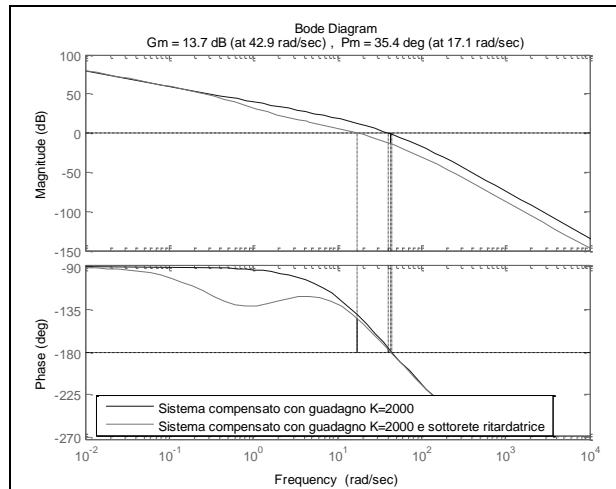
$$\tau = 0.57 \text{ s.}$$

A questo punto si determina la sottorete correttrice ritardatrice:

$$G_R(s) = \frac{1 + 0.57s}{1 + \frac{0.57}{0.22}s} = \frac{1 + 0.57s}{1 + 2.59s},$$

che ha un polo in -0.38 e uno zero in -1.75.

Si determina quindi il sistema parzialmente compensato con la sottorete ritardatrice e se ne tracciano i diagrammi di Bode, individuando i margini di stabilità.



Quindi si determina l'anticipo da introdurre in corrispondenza della nuova pulsazione di *crossover* di guadagno con la sottorete anticipatrice, individuando la pulsazione di zero della sottorete anticipatrice $\frac{1}{\tau_2}$.

Si cerca la pulsazione alla quale risulti (passo 6):

$$20\log_{10}|G_R(j\omega_{c2}) \cdot KG(j\omega_{c2})| = 10\log_{10}\alpha \approx -6.5 \text{ dB},$$

da cui si ottiene la pulsazione ω_{c2} di circa 40 rad/s.

Poiché la nuova pulsazione di *crossover* di guadagno deve coincidere con la pulsazione di massimo anticipo, si impone (passo 7):

$$\tau_2 = \frac{1}{\omega_{c2}\sqrt{\alpha}} \approx 0.05 \text{ s.}$$

A questo punto si determina la sottorete correttrice anticipatrice:

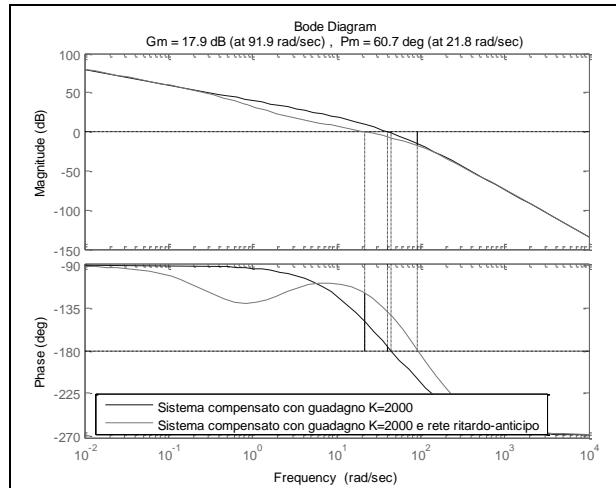
$$G_A(s) = \frac{1 + 0.05s}{1 + 0.22 \cdot 0.05s} = \frac{1 + 0.05s}{1 + 0.01s},$$

che ha un uno zero in -20 e un polo in -100.

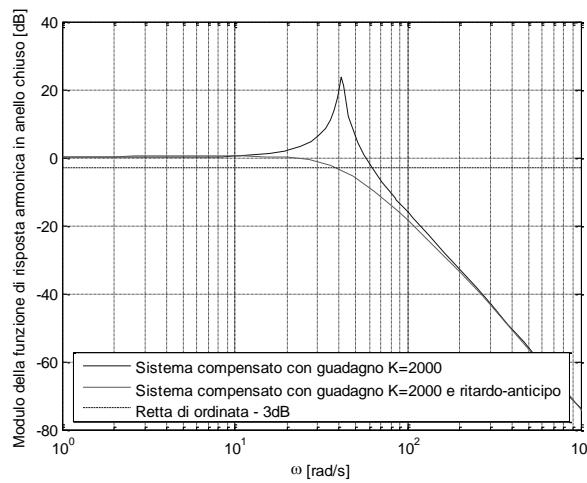
In definitiva, la rete ritardo-anticipo vale:

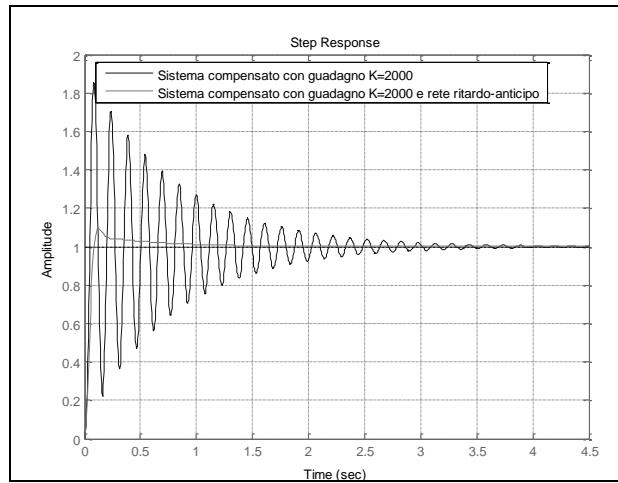
$$G_{RA}(s) = \frac{1+0.57s}{1+2.59s} \cdot \frac{1+0.05s}{1+0.01s}.$$

Si esegue infine la verifica tracciando i nuovi diagrammi di Bode del sistema compensato (passo 8).



Le specifiche sono rispettate, poiché il margine di fase vale quasi 61° . Poiché la pulsazione di crossover di guadagno del sistema, compensato con la rete ritardo-anticipo, vale circa 22 rads^{-1} ed è quindi leggermente inferiore a quella del sistema non compensato (41 rads^{-1}), anche la larghezza di banda del sistema chiuso in retroazione diminuisce. Essa vale ora 38.6 rads^{-1} , come mostra la figura successiva.





Inoltre, dall'ultima figura è evidente che il sistema compensato con la rete ritardo-anticipo presenta una risposta al gradino meno oscillante di quello originario, in accordo con l'incremento del margine di fase, ma maggiore tempo di salita, in accordo con la diminuzione della larghezza di banda.

Approfondimenti consigliati:

- Capitolo 6 ed esercizi del testo G. Marro, Controlli Automatici, Zanichelli, 2004.**
- Capitolo 9 del testo A. V. Papadopoulos, M. Prandini, Fondamenti di Automatica. Esercizi, Pearson, 2016.**
- Capitolo 12 del testo M. Dotoli, M. P. Fanti, MATLAB – Guida al Laboratorio di Automatica, Città Studi, 2008.**